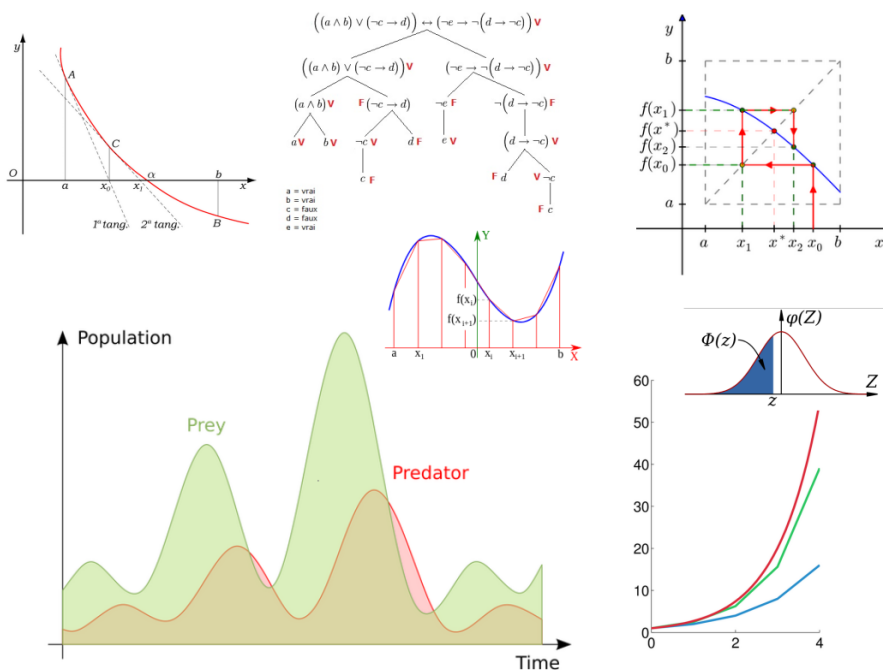


Lezioni di Matematica

Complementi di Matematica
per tutt'e cinque gli anni di scuola superiore
Vol. 3

di
EMANUELE CASTAGNA

Docente di ruolo nelle scuole secondarie superiori
di MATEMATICA



STAMPA AUTONOMA
DIFFUSIONE GRATUITA

(1^a edizione: marzo 2026)

Emanuele Castagna - "Lezioni di Matematica" - Vol.3
ISBN: 979-12-243-2593-2

Prefazione

Questo terzo ed ultimo volume, raccoglie e riorganizza lezioni che, durante gli anni d'insegnamento, sono andate "perdendosi", anche a causa dell'inserimento di nuovi insegnamenti nell'offerta formativa degli Istituti Tecnici, oppure, soprattutto, per la vistosa, quanto vergognosa, diminuzione delle ore di Matematica nel corso del quinquennio, operata dalla varie sciagurate riforme che hanno umiliato questa disciplina. Anziché rafforzarne la presenza e sottolineare la centralità nella formazione delle nuove generazioni (e non parliamo solo delle "competenze" ed "abilità" matematica in senso stretto, ma anche per la formazione del pensiero critico e razionale, che dovrebbe comunque essere presente in qualsiasi cittadino "modello" di una sana civiltà avanzata), gli esperti ministeriali hanno pensato bene di ridurre al minimo indispensabile le ore di lezione di Matematica. Necessariamente i capitoli non saranno più, come per i primi due volumi dell'opera, legati da consequenzialità logica nella trattazione, ma tratteranno i vari argomenti che abbiamo avuto modo di insegnare, riferendosi agli anni scolastici in cui essi sono stati discussi. Ad esempio, al primo anno di scuola superiore, quando iniziammo ad insegnare nel lontano 2000/01, uno degli argomenti principali erano i "principi di Logica simbolica": oggi non la insegniamo più, dato che nell'Istituto attuale in cui prestiamo servizio, hanno una materia dedicata all'informatica, all'interno della quale, sono presenti anche quegli insegnamenti che facevamo noi in passato. Altro esempio: con le numerose ore di lezioni di Matematica, tra Matematica e Calcolo numerico, grafico e probabilistico (ex insegnamento di "Matematica Applicata", che è stato completamente cancellato (!!!)) si poteva arrivare, al quinto anno, allo studio delle superfici, alla determinazione di max/min di funzioni a due variabili, liberi o vincolati ed alle applicazioni numeriche dei metodi di approssimazione per risolvere equazioni o calcolare integrali definiti. Addirittura, in una Classe particolarmente predisposta all'apprendimento, ricordiamo che riuscimmo anche a scrivere dei fogli di calcolo per la determinazione dei valori della "campana di Gauss", al fine di determinare le probabilità associate alla distribuzione normale o, anche, l'approssimazione numerica dei "problemi di Cauchy" tramite metodi numerici (Eulero come punto di partenza!), finanche la realizzazione di una simulazione numerica del modello "preda-predatore" di Lotka-Volterra. Inoltre ci si poteva permettere il lusso di introdurre un po' di algebra lineare e ricerca operativa (metodo del simplesso, ecc...) Purtroppo le ore sono state, come detto precedentemente, sottratte o, più propriamente, scippate e le due cattedre di Matematica e "Matematica applicata" sono state ricondotte a una sola con assegnate meno della metà del numero delle ore che si avevano, complessivamente, precedentemente e, soprattutto, con la pretesa che nella misera

disposizione “3+1” si debbano trattare (quasi) tutti gli argomenti che si trattavano in quelle due discipline, prima della riforma. Fu un momento storico tragico, soprattutto per le conseguenze a lungo termine: alunni che avrebbero potuto avere una buona e sostanziosa preparazione matematica già in uscita dalla scuola superiore, sono stati costretti a studiarne molto meno e, gli insegnanti, furono costretti a diminuire drasticamente la quantità di argomenti proposti (pena la compromissione della qualità delle lezioni stesse!) e, pertanto, ad operare delle scelte su quali parti “tagliare”. Per colui a cui piace la Matematica, studiarla o insegnarla, queste scelte imposte dall’“alto”, non possono che aver fatto male e, tuttora, a fare male.

Ritornando alla struttura del libro, troveremo utile indicare, capitolo per capitolo, assieme all’argomento trattato, anche in quale anno trovava collocazione naturale la trattazione stessa. Molti argomenti presuppongono già una conoscenza di quanto scritto nei primi due volumi di questa opera, pertanto rimandiamo allo studio di essi, indicando, all’inizio del capitolo -ove lo si ritenga necessario- quali siano i prerequisiti per leggere il capitolo stesso.

Ringraziamenti. Doveroso ringraziare tutti coloro che hanno apprezzato i primi due volumi e, con i loro messaggi e testimonianze, hanno motivato il completamento anche di questo terzo volume: grazie colleghi, grazie amici, grazie a voi, che nonostante non vi conosca di persona, siete interessati a studiare ed a capire la Matematica! siete stati fondamentali e questo volume è per voi. Un speciale ringraziamento alla mia paziente famiglia, che ha saputo sopportarmi con amore e fiducia e mi ha fornito quell’equilibrio fondamentale nella vita di ogni giorno: mi rende soddisfatto di respirare.

Un ringraziamento speciale al mio personale suggeritore, ispiratore e correttore *prof. Vincenzo Rubino*, verso il quale nutro profonda stima professionale e personale e che mi onora della sua preziosa e costante amicizia.

Simeri Mare, 15.03.2026

Emanuele Castagna

L'intera opera è stata scritta utilizzando l'ambiente \LaTeX in un sistema *Linux*, per cui si ringraziano i creatori e curatori dei relativi progetti per la possibilità offerta di utilizzare questi mezzi informatici nella libera divulgazione di opere d'ingegno e culturali. Le figure sono state realizzate con *Geogebra*, di cui si raccomanda l'utilizzo per chiarire molte delle idee presentate o per approcciare gli esercizi proposti. Per le "scritture autografe" e le immagini "a mano libera", lo strumento principale utilizzato è stato il software *Xournal++* per *Linux*, rilasciato sotto licenza *GNU GPLv2* o successiva.

In copertina: *collage* di immagini scaricate dal sito "Wikimedia Commons", ad opera dell'autore.

Quest'opera è distribuita con licenza Creative Commons "Attribuzione – Non commerciale – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia".



Si invita alla massima pubblicazione e diffusione, grazie.

*“La Logica vi porterà da A a B.
L’immaginazione vi porterà dappertutto”.*
(A. Einstein)

*“A tutti coloro in cui vive il desiderio di capire ed
imparare..*

*...alle mie figlie I. e D. L., spettacolari sintesi di
quell’amabile essere che è mia moglie R. K.”*

Indice

Prefazione	iii
Ringraziamenti	iv
Parte 1. Argomenti del primo biennio	1
Capitolo 1. Logica simbolica (Matematica)	3
1. I fondamenti	4
1.1. Le Leggi di De Morgan	11
1.2. Quantificatori in Logica	11
2. Forme valide di ragionamento	12
2.1. Modus Ponens	13
2.2. Modus Tollens	14
Parte 2. Argomenti del secondo biennio	19
Capitolo 2. Analisi Numerica	21
1. Approssimazione numerica delle soluzioni di una equazione	22
1.1. Metodo di bisezione	22
1.2. Metodo delle secanti	25
1.3. Metodo delle tangenti	28
1.4. Metodo del punto fisso	31
2. Metodi di approssimazione numerica degli integrali definiti	34
2.1. Metodo dei rettangoli	35
2.2. Metodo dei trapezi	37
2.3. Metodo delle parabole	39
Parte 3. Argomenti del Quinto Anno	43
Capitolo 3. Funzioni a due variabili e superfici	45
1. Somma, prodotto scalare, lunghezze ed angoli	45
2. Piani, prodotto vettoriale ed aree	49
3. Superfici e vettore gradiente	52
3.1. Definizioni di superfici	53
3.2. Derivazione lungo varie direzioni, derivate parziali e vettore gradiente	57

3.3. Piani tangenti e direzione normale alla superficie	60
3.4. Caratteristica fondamentale del vettore gradiente.	62
Capitolo 4. Ottimizzazione di funzioni a più variabili	65
1. Differenziabilità e questioni di approssimazioni	65
2. Ottimizzazione di funzioni a più variabili	68
2.1. Forme quadratiche	69
2.2. Determinazione di massimi o minimi	70
3. Ottimizzazione vincolata e moltiplicatori di Lagrange	75
Capitolo 5. Approssimazione numerica delle soluzioni di una o.d.e.	81
1. Metodo di Eulero	82
2. Metodo di Heun	85
3. Simulazione modello Preda-Predatore	87
3.1. Presentazione del modello	87
3.2. La soluzione	88
Capitolo 6. La Trasformata di Laplace	91
1. Trasformata di Laplace: sue proprietà e qualche calcolo	93
2. Le trasformate delle principali funzioni	97
3. Trasformata utilizzata per risolvere o.d.e. lineari.	100
4. Un piccolo approfondimento su una funzione particolare	102
Capitolo 7. Serie di Fourier ed approssimazione delle funzioni periodiche	105
1. Funzioni periodiche	105
2. Esempi di approssimazione	112
Capitolo 8. Esercizi	119
1. Relativi al Capitolo 1	119
2. Relativi al Capitolo 2	121
2.1. Approssimazione soluzione equazione	121
2.2. Approssimazione aree	122
3. Relativi al Capitolo 3	124
4. Relativi al Capitolo 4	127
5. Relativi al Capitolo 5	130
6. Relativi al Capitolo 6	133
7. Relativi al Capitolo 7	136
Indice analitico	139
Bibliografia	141

Parte 1

Argomenti del primo biennio

CAPITOLO 1

Logica simbolica (Matematica)

(Primo Anno)

Ci piace introdurre il discorso sulla Logica (Matematica) con il prologo del Vangelo di San Giovanni:

*In principio era il Verbo,
il Verbo era presso Dio
e il Verbo era Dio.
Egli era in principio presso Dio:
tutto è stato fatto per mezzo di lui,
e senza di lui niente è stato fatto
di tutto ciò che esiste.
In lui era la vita
e la vita era la luce degli uomini;
[...]*

perché nello scritto antico originale greco, la parola che è stata tradotta come "Verbo", era "*Logos*", esattamente quella da cui origina anche la parola "Logica", argomento di studio di questo capitolo. Se andiamo a cercare "Logos" nel dizionario etimologico della lingua italiana, edito da Zanichelli, troviamo scritto: "La ragione intesa sia come attività propria dell'uomo che come causa e sostanza del mondo" e, più avanti, "voce greca con i significati di *ragione, discorso, parola*". Pertanto la *Logica* deve essere considerata propedeutica a tutti i ragionamenti e, addirittura, presupposto fondamentale di ogni discorso sensato che si possa fare. Purtroppo non è così: spesso si sentono anche abili oratori che non utilizzano correttamente le regole del ragionamento corretto e, pertanto, sono portati a "dedurre" delle conclusioni assolutamente non veritiere! ad affermare, con convinzione, cose non giuste. Per questo è necessario riflettere e studiare la *Logica*, disciplina che si occupa proprio dello studio della costruzione di ragionamenti corretti e delle relazioni che sussistono tra le varie affermazioni, almeno per imparare quali siano le forme di "*ragionamento corretto*" e non incorrere in conclusioni errate. E' bene ricordare che tra i primi studiosi di Logica c'è Aristotele ¹: il celeberrimo filosofo greco che è da considerarsi, in effetti,

¹"Il maestro di color che sanno", come lo denominò Dante.

il padre di questa disciplina, almeno fino a quando essa non è entrata in contatto con il mondo dei matematici ed ha potuto progredire notevolmente grazie all'utilizzo di un efficace simbolismo "matematico" ², egli non ha solo posto le basi della Logica, ma ha condizionato per secoli ogni discorso, tanto che a lui -durante il medioevo- ci si riferiva con la frase "*ipse dixit*", per la serie "l'ha detto Aristotele e quindi sono verità assolute che non hanno bisogno di verifiche". Si fa presente, inoltre, l'importanza dello studio della Logica nella formazione delle "élite" culturali di ogni tempo, in particolare, ad esempio, sempre nel medioevo, essa veniva insegnata, praticamente, per come l'aveva "creata" Aristotele stesso (con interpretazioni importanti di altri studiosi, tipo Averroè) e faceva parte delle *arti del Trivio*, assieme a "grammatica" e "retorica" ³ ovvero quelle "arti del linguaggio" che venivano insegnate alle persone colte dell'epoca, prima di poter accedere allo studio delle *arti del Quadrivio* ⁴. Quando ai primi del '900 si iniziò ad indagare sui "fondamenti" delle discipline scientifiche, in particolare della Matematica, l'ottimismo, retaggio di una visione positivista della società, era particolarmente presente e per anni si era creduto che tutta la Matematica potesse poggiarsi sull'Aritmetica e sulla Logica: grandi studiosi del '900, che legarono il proprio nome a notevoli studi nell'ambito della Logica, sono Frege, Russell, Whitehead, in Italia ricordiamo almeno Peano, Enriques, Vailati; ma, soprattutto, è da "osannare" Gödel, che arrivò a vette vertiginose dimostrando, addirittura, che non tutto può essere dimostrato ⁵, tramite i suoi famosi *teoremi di incompletezza*.

1. I fondamenti

La *Logica*, come detto nella premessa, si occuperà di studiare ragionamenti corretti e "costruire" discorsi giusti: per fare questo non prenderà in considerazione frasi o asserzioni a cui non si possa attribuire un valore di verità. Classicamente i valori di verità sono solo due: "*vero*" [V] o "*Falso*" [F]; accettando questo, la Logica che svilupperemo si potrà anche definire *dicotomica* ⁶ ed è quella che ha fondato Aristotele. Si sappia, comunque, che si sono introdotte altri tipi di Logica, soprattutto negli ultimi tempi (diciamo dopo l'avvento della meccanica quantistica e degli elaboratori elettronici dell'informazione) dette "*Logiche sfumate*" -**Logiche Fuzzy**- per le quali, a

²Da qui la denominazione "Logica simbolica (matematica)".

³La Logica era denominata "Dialettica".

⁴Che consistevano in "Aritmetica", "Geometria", "Musica" e "Astronomia", ovvero a quelle arti che potremmo chiamare "del numero e della misura".

⁵Penso che solo la Matematica si può permettere di dimostrare che non tutto quello che afferma può essere dimostrato!

⁶Ovvero con due valori di verità.

ciascun valore di verità si attribuisce una probabilità e, pertanto, alcune “affermazioni” dovranno essere considerate vere e false contemporaneamente con un certo grado di fiducia assegnato.

DEFINIZIONE 1. Si chiama proposizione una frase/affermazione a cui si può attribuire un valore di verità

Ad esempio “La fragola è celeste” è una proposizione (a cui diamo valore di verità [F]), mentre “Emanuele è bello” non è una proposizione, poiché la percezione della bellezza è soggettiva e quindi non si può attribuire a quella frase un valore di verità univoco. Altre proposizioni possono essere “Oggi piove” oppure “Bevo un caffè”, a cui possiamo attribuire valori di verità a seconda che davvero piovesse o bevessi un caffè.

Quando si costruisce un discorso, normalmente si “uniscono” più frasi in qualche modo. Per formare una frase da più proposizioni elementari si utilizzano i *connettivi logici*: sarà compito della Logica capire quando una frase, costruita tramite tali connettivi, risulta vera o falsa. Prima di presentare i principali connettivi logici, è bene tenere presente che una proposizione può essere negata e, in tal caso, se essa avesse il valore di verità [V], diventerebbe in automatico [F] e viceversa. Ad esempio, se indichiamo con l’“etichetta” p la proposizione “mangio un panino”, allora la negazione di p , indicata con $\neg p$ sarà la proposizione “non mangio un panino”⁷. Evidentemente, se p è vera, allora $\neg p$ è falsa, ma se p è falsa, poiché non mangio il panino, allora $\neg p$ risulta vera. Possiamo riassumere la negazione tramite questa tabella, detta **tabella di verità** per la negazione :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Le **tabelle di verità** sono molto utili, come presto vedremo, per avere chiara la situazione e ricavare il valore di verità di una frase, a partire dal valore di verità delle singole proposizioni costituenti. Ultima osservazione, prima di introdurre i principali connettivi logici: in Logica, le singole proposizioni non devono necessariamente essere attinenti allo stesso discorso! addirittura non serve nemmeno conoscere quale sia l’asserzione delle varie proposizioni, dato che il discorso diventa immediatamente *astratto*, utilizzando *etichette* che potrebbero rappresentare qualsiasi proposizione e studiando il valore di verità delle frasi a prescindere dal loro stesso significato reale. La potenza di uno studio astratto è proprio nel fatto che quel che si dice, può essere contestualizzato in varie situazioni in modo ugualmente giusto.

⁷Oppure “Non è vero che mangio un panino”.

DEFINIZIONE 2. Una frase costruita con il connettivo logico *e* (corrispondente al latino “*et*”), simbolo \wedge , risulta vera [V] solo e soltanto se sono vere le singole proposizioni che la costituiscono (altrimenti è falsa). Se la frase è costruita con il connettivo logico *o* (corrispondente al latino “*vel*”⁸), simbolo \vee , essa risulta vera [V] sempre che sia vera almeno una delle proposizioni costituenti⁹.

Queste due sono le più elementari forme di connettivo logico... prima di introdurne altre, rappresentiamo due tabelle di verità per questi connettivi e procediamo a fare qualche esempio. Siano p e q due proposizioni e consideriamo tutte le combinazioni di valori di verità tra queste due proposizioni (sono in numero di 2^2) e, a fianco, scriviamo la “colonna” dei valori di verità per il connettivo logico *e* e per la *o*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio: Si determini il valore di verità della seguente frase: “Mangio un panino e guardo la tv, oppure esco con il cane o mi faccio un giro in bici”, data in risposta alla mia domanda: “Che fai nel pomeriggio?”.

Posso associare “etichette” per ciascuna delle proposizioni che mi sono state riferite... ad esempio:

$$p = \text{“Mangio un panino”}, \quad q = \text{“guardo la tv”}$$

$$r = \text{“Esco con il cane”}, \quad s = \text{“faccio un giro in bici”}.$$

A questo punto la frase (detta anche *proposizione composta*) può essere rappresentata in simboli¹⁰:

$$(p \wedge q) \vee (r \vee s).$$

⁸In latino distinguevano due tipi di “o”, quella “inclusiva” -vel- e quella “esclusiva” -aut-.

⁹Ovvero è falsa se e soltanto se sono false tutte le proposizioni elementari costituenti.

¹⁰E, chiaramente, potrebbe anche essere contestualizzata con altre attività, che non siano mangiare panini, guardare la tv, uscire con il cane o andare in bicicletta!

Vogliamo sapere quando sarà vera o quando sarà falsa: all'uopo costruiamo una tabella di verità con tutte le possibili combinazioni di verità per le quattro proposizioni costituenti (quindi si dovranno considerare $2^4 = 16$ casi ¹¹):

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \vee s$	$(p \wedge q) \vee (r \vee s)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Si noti che abbiamo ricavato le due colonne di $p \wedge q$ e $r \vee s$ utilizzando le tabelle di verità della **e** e della **o**, in corrispondenza dei valori di verità presenti nelle colonne di p , q e, rispettivamente r , s , finendo con l'ultima colonna che si calcola con la tabella di verità della **o** applicata alla quinta e sesta colonna della grande tabella. Cosa possiamo dire, una volta completato il *calcolo sulla tabella di verità*? Ebbene, ci sono solo tre casi in cui la frase sarà falsa:

- (1) Se p è vera ma le altre proposizioni sono tutte false;
- (2) Se q è vera ma le altre sono tutte false;
- (3) Se sono tutte proposizioni false.

Questo significa, nel contesto dell'affermazione del mio amico: se “mangia il panino” ma non fa nemmeno una delle altre attività, ovvero “non guarda la tv”, “non esce con il cane” e “non si fa un giro in bici”, allora mi avrà detto una “bugia”! stessa cosa se “guarda la tv”, ma poi non fa nient'altro di quanto mi aveva detto che avrebbe potuto fare e, in ultimo, non fa proprio nulla di quanto aveva dichiarato. Chi l'avrebbe mai detto? eppure è così e,

¹¹Per non dimenticare nessun caso si può procedere così: all'ultima proposizione si alternano un [V] ed un [F] in colonna; alla penultima due [V] e due [F]; alla terzultima quattro [V] e quattro [F] ecc... aumentando sempre per potenze di 2.

in fondo, il problema grosso è che non si pone sufficiente attenzione all'utilizzo dei connettivi nella lingua parlata: in verità si scambiano allegramente le **e** con le **o**, pensando che in fondo siano la stessa cosa, ma questo porta ad errori piuttosto grossolani.

Un simpatico aneddoto (una barzelletta, se vogliamo) che riguarda i connettivi è il seguente: un tale va al supermercato e la moglie gli raccomanda di prendere 5 mele e, se ci sono le uova, di comprane 10. Al ritorno dal supermercato porta 10 mele alla moglie e questa gli chiede: "Perché hai comprato 10 mele? ti avevo detto di prenderne 5..." ed il marito le risponde: "C'erano le uova...". A parte la battuta, dal punto di vista logico il ragionamento è giusto!

DEFINIZIONE 3. Una frase che utilizzi la forma "*se p allora q*", ovvero, "*se è vero questo segue quello*" si dice costruita secondo il connettivo logico dell'**implicazione** (materiale), simbolo \rightarrow , - essa risulta falsa solo se la prima è [V] e la seconda è [F] ¹²

Pertanto la tavola di verità dell'implicazione materiale è la seguente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ci sono alcune considerazioni da fare e, soprattutto, dei chiarimenti su questo connettivo logico. Prima di tutto: perché "materiale"? Si aggiunge questo attributo per distinguerla dalla implicazione che viene utilizzata per ragionamenti deduttivi in cui la proposizione iniziale ha "attinenza" con quella finale. Nella logica simbolica -e l'abbiamo già detto prima- non necessariamente le proposizioni devono avere anche qualche legame semantico... ad esempio, dal punto di vista logico, la proposizione composta: "Se mangio un panino allora corro la maratona di New York" ha perfettamente senso e sarà falsa solo se mangio il panino ma poi non correrò la maratona di New York! mentre, la proposizione "Se il triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali", è una implicazione più sensata dal punto di vista dell'opinione comune, la prima ci sembra per lo meno una frase "sballata", eppure sono entrambe costruite in modo giusto, dal punto di vista logico. Nella implicazione materiale, insomma,

¹²Da una proposizione vera non può discenderne una falsa, mentre da una falsa può tranquillamente dedursi sia una falsità che una verità!

non deve esserci necessariamente un nesso causale tra la proposizione antecedente e quella conseguente mentre, nei ragionamenti deduttivi, in cui si utilizza l'implicazione "logica", il nesso causale è fondamentale ed evidente.

Esempio: Determinare il valore di verità della proposizione (composta): "Se mi rimane tempo e mi viene voglia, ti faccio quel favore". Cosa cambia se invece dichiarassi: "Se mi rimane tempo o mi viene la voglia, ti faccio quel favore"?

Sia p la proposizione "mi rimane tempo", q "mi viene voglia" e r "ti faccio quel favore". Le due frasi possono essere riscritte, simbolicamente, come segue:

- a. $(p \wedge q) \rightarrow r$
- b. $(p \vee q) \rightarrow r$

Costruiamo le due tabelle di verità e vediamo...

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Si osserva subito che la frase risulta falsa, nel primo caso, solo se "ho tempo a disposizione, mi viene pure la voglia, ma non ti faccio il favore". Invece, nel secondo caso, essa risulta falsa in tre occasioni: un caso è come prima, un altro se "ho tempo a disposizione, ma non ho voglia di fare il favore e, nei fatti, non te lo faccio"! ed anche se "non ho tempo a disposizione, però ho voglia di farti il favore eppure non te lo faccio"!

Esempio: Studiare il valore di verità della seguente proposizione:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q).$$

Effettuiamo lo studio direttamente su una tabella di verità:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \vee q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

A parte la lettura della tabella, lasciata alla cura dello studente, preme sottolineare che la colonna finale coincide esattamente -caso per caso- alla colonna che si otterrebbe se noi avessimo semplicemente considerato $p \rightarrow q$: quando succede questa cosa, possiamo dire che le due proposizioni sono **logicamente equivalenti**, proprio perché assumono gli stessi valori di verità in corrispondenza delle stesse combinazioni di valori per le proposizioni costituenti, pertanto possiamo scrivere:

$$“(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)” \equiv “p \rightarrow q”.$$

Ci sono due casi molto interessanti di proposizioni composte che vengono riconosciute come forme particolari: il primo caso si ha quando *la frase risulta sempre vera*, qualsiasi siano le combinazioni di verità delle proposizioni costituenti; il secondo caso è quando, invece, *la frase risulta sempre falsa*. Nel primo caso diremo che la proposizione (composta) è una **tautologia**, nel secondo caso una **contraddizione**. Esempi immediati sono

$$p \vee \neg p$$

si invita lo studente a verificare, con una tabella di verità, che questa è una tautologia e

$$p \wedge \neg p$$

idem: si verifichi che è una contraddizione.

L'ultimo connettivo logico è la **o** “disgiunzione esclusiva” (detta anche “xor”) che, comunque, può essere riscritta in termini di **e** e **o**.

DEFINIZIONE 4. Una frase costruita con il connettivo logico **xor** (**o** disgiuntiva), simbolo $\dot{\vee}$, è vera solo se è vera una sola delle proposizioni elementari costituenti ¹³.

La tabella di verità della “xor” è questa:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

¹³Corrisponde all'aut dei latini.

Si noti che essa è equivalente a ¹⁴:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

1.1. Le Leggi di De Morgan. Le *Leggi di De Morgan* sono due modi di reinterpretare le negazioni di frasi composte con i connettivi logici elementari “e” od “o”: esse esprimono il fatto ragionevole che per negare il verificarsi contemporaneo di due proposizioni, allora basta che almeno una di esse non si verifichi e, per converso, se si deve negare il fatto che almeno una tra due proposizioni sia vera, è necessario che entrambe siano false ¹⁵! in formule si ha:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad \text{e} \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

La dimostrazione procede verificando che le colonne corrispondenti, nelle tabelle di verità, per il primo membro ed il secondo membro dell’equivalenza indicata, sono identiche.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

In modo simile si dimostra la seconda legge: si lascia come esercizio al lettore attento.

1.2. Quantificatori in Logica. I quantificatori, in Logica, sono essenzialmente di due tipi: quello *esistenziale* e quello *universale*. Il primo indica l’esistenza di “qualcosa”, mentre il secondo indica che un “qualcosa” riguarda tutti gli elementi di un dato discorso. Si chiamano quantificatori proprio perché specificano delle quantità: “uno” o “tutti”. In particolare, il quantificatore esistenziale si indica con il simbolo “ \exists ” e si legge *esiste*, ad esempio, se si vuole scrivere che “esiste un elemento a dell’insieme S , che soddisfa a qualche proprietà”, allora scriveremo:

$$\exists x \in S : \dots$$

dove “ \in ” è il simbolo di *appartenenza*, i “:” si leggono *tale che* ed a posto dei punti sospensivi si dovrebbero scrivere la proprietà data.

¹⁴Dimostralo!

¹⁵Non è vero che entrambe sono vere: allora almeno una delle due è falsa; non è vero che almeno una delle due è vera, allora devono essere entrambe false, contemporaneamente.

Il quantificatore universale, per il quale si utilizza il simbolo “ \forall ”, si legge *per ogni*, ad esempio, si voglia scrivere “tutti gli elementi x di S hanno questa proprietà”, in linguaggio simbolico si “traduce” come:

$$\forall x \in S : x \dots$$

Per negare esistenza o universalità, basta *sbarrare* i simboli corrispondenti, per cui “ \nexists ” significa *non esiste* e “ \nforall ” si legge *non tutti*. Inoltre, se l’esistenza di un qualche elemento è *unica*, allora si utilizza il punto esclamativo subito dopo il simbolo di esistenza: “ $\exists!$ ” si legge *esiste un unico...* Spesso capita di dover negare un quantificatore e, pur essendo facile farlo, la giusta conseguenza di questa operazione non viene presa in considerazione: questo capita perché, nel linguaggio corrente, di solito c’è superficialità nell’utilizzare i termini giusti. Ad esempio, se vogliamo negare la proposizione **tutte le pecore sono bianche**, molto semplicemente diremo **non è vero che tutte le pecore sono bianche**. Ora, questa seconda proposizione è equivalente ad una sola giusta considerazione, ovvero che c’è almeno un pecora di altro colore. Quindi, attenzione: negare il quantificatore universale significa affermare che esiste almeno un caso in cui la proposizione non è vera. In simboli, se $P(x)$ indica una proposizione che vale per x , allora:

$$\nforall x, P(x) \equiv \exists x : \neg P(x).$$

Per converso, negare l’esistenza di qualcosa, equivale a dire che “tutto” ha la caratteristica opposta a quella richiesta da quel qualcosa, ad esempio: negare **esiste un triangolo isoscele con tutt’e tre i lati diversi**, significa che (tutti) **i triangoli isosceli non hanno tutt’e tre i lati diversi**¹⁶. In simboli:

$$\nexists x : P(x) \equiv \forall x, \neg P(x).$$

Siamo ora giunti a presentare uno dei punti più interessanti di tutta la Logica: la determinazione delle *forme di ragionamento valido*, che sono solo due, come dimostreremo nel prossimo paragrafo.

2. Forme valide di ragionamento

Qui si entra nel vivo del discorso aristotelico e, per comprenderlo nella sua essenza, dobbiamo premettere che vale il seguente principio.

DEFINIZIONE 5 (Principio del Terzo Escluso). *Una proposizione può essere vera [V] o falsa [F]: se è [V] non può essere falsa e se è [F] non può essere vera!*¹⁷

¹⁶E questo non significa che tutt’e tre i lati debbano essere uguali, ma che almeno due lo siano, dato che tutt’e tre diversi non possono esserlo!

(ps.: “almeno due” significa o due lati uguali o tutt’e tre uguali).

¹⁷Terzium non datur!

Fare un ragionamento significa *dedurre* la verità di alcune proposizione a partire da altre. La forma più elementare di ragionamento è il **sillogismo**, che consiste nel legare *tre proposizioni* in modo tale che dalla verità delle prime due, discenda anche quella della terza. Le prime due proposizioni si chiameranno “premesse”, mentre l’ultima si chiamerà “conclusione”. Celeberrimo è il sillogismo seguente:

Premessa (maggiore): “Tutti gli uomini sono mortali”

Premessa (minore): “Socrate è un uomo”

Conclusione: “Socrate è mortale”.

A parte i sillogismi, studianti ampiamente ed approfonditamente da Aristotele ¹⁸, le altre due forme di ragionamento valide -le uniche valide!- sono conosciute come **Modus Ponens** e **Modus Tollens**.

2.1. Modus Ponens. La prima forma di ragionamento valido consiste nell’affermare la verità di una proposizione, la validità di una implicazione, che parta dalla prima proposizione e ne propone un’altra e, in conclusione, affermare la validità della seconda proposizione, secondo lo schema seguente:

$$\frac{\begin{array}{l} p \quad [V] \\ p \rightarrow q \quad [V] \end{array}}{\Rightarrow q \quad [V]}$$

Da intendersi: “Se p è vera ed è vero che p implica q , allora anche q deve essere vera” ¹⁹.

Esempio: Sia p la proposizione “piove”, q “le strade sono bagnate” allora questa forma di ragionamento consiste nel dedurre che, se è vero che *quando piove le strade si bagnano*, dato che “piove” ²⁰ allora troverò le “strade bagnate”.

$$\frac{\begin{array}{l} p = \text{“piove”} \quad [V] \\ p \rightarrow q = \text{“Se piove allora le strade si bagnano”} \quad [V] \end{array}}{\Rightarrow q = \text{“quindi le strade sono bagnate”} \quad [V]}$$

Dimostriamo la necessità logica di questa forma di ragionamento, utilizzando una tabella di verità.

¹⁸Nella sua opera Organon, Aristotele studia ben 256 forme possibili di sillogismi e ne individua di validi solo 24: quest’opera, databile tra il 335 ed il 322 a.C., è alla base dello studio della Logica (classica).

¹⁹Da notare il simbolo si **implicazione logica** “ \Rightarrow ”.

²⁰Sto affermando p ed immagino che quella implicazione sia vera!

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Come si vede dalla tabella, le uniche celle ²¹ in cui compare [V] sia per p che per $p \rightarrow q$ sono nella prima riga, il ché significa che la q deve essere *necessariamente vera!*

2.2. Modus Tollens. Il secondo modo di ragionare corretto è quello che, premettendo sempre che l'implicazione sia giusta, dalla *falsità* della seconda proposizione segue la falsità anche della prima proposizione, secondo lo schema seguente ²²:

$$\frac{\begin{array}{l} q \quad [F] \\ p \rightarrow q \quad [V] \end{array}}{\Rightarrow p \quad [F]}$$

Consideriamo sempre l'esempio di prima: "se piove le strade di bagnano" ²³ e "le strade non sono bagnate", allora posso dedurre che "non è piovuto". Infatti ogni volta che piove, le strade si bagnano, ma se non le trovo bagnate, sicuramente non è piovuto... da notare che se le trovassi bagnate, non è detto che debba per forza essere piovuto: potevano bagnarsi per qualche altro motivo, ad esempio perché c'è stata una perdita d'acqua dall'acquedotto, oppure perché qualcuno le "annaffia" con una pompa...

$$\frac{\begin{array}{l|l} q = \text{Strade bagnate} & [F] \quad | \quad \text{le strade non sono bagnate} \\ p \rightarrow q = \text{se piove le strade si bagnano} & [V] \quad | \quad \text{implicazione supposta vera!} \end{array}}{\Rightarrow p = \text{piove} \quad [F] \quad | \quad \text{quindi non è piovuto}}$$

Anche in questo, la necessità della conclusione logica, si legge bene in una tabella di verità:

²¹Che abbiamo opportunamente evidenziate.

²²Tollens proprio perché "toglie la verità" ovvero falsifica la conclusione per far vedere che anche la premessa era falsa.

²³Implicazione supposta vera!

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

E' interessante studiare le varie affermazioni, detti o proverbi, tratti dalla cultura popolare, alla luce di queste forme corrette di ragionamento: se questi detti popolari sono condivisibili per quanto affermano ²⁴, allora possiamo applicare le forme di ragionamento valide e, se le conclusioni sono palesemente errate ²⁵, allora potremmo rigettare a buona ragione i detti stessi, non potendo più considerare vere le implicazioni in premessa.

Esempio: "Se non studi, non sarai promosso".

Si possono trarre solo due deduzioni corrette:

- 1°) Non studi, ergo sarai bocciato
- 2°) Sarai promosso, quindi hai studiato.

AmMESSO che quella implicazione sia giusta e condivisibile, è comunque da notare che entrambe le due forme di ragionamento corretto, non rispecchiano la realtà dei fatti! anche se uno non studia, attualmente, purtroppo, può venire promosso: questo è contro Logica!!!

Esempio: "Chi dorme non piglia pesci"

Anche qui ci sono solo due deduzioni corrette:

- 1°) Dorme, ergo non prende nulla
- 2°) Prende pesci, quindi non ha dormito.

In questo caso le deduzioni sono più condivisibili, per cui immaginiamo che sia un buon detto popolare.

Esempio: "Chi non risica, non rosica"

- 1°) Non si rischia, quindi non si avrà guadagno
- 2°) Avrò un guadagno, quindi ho rischiato.

In questo ultimo caso, dato che le deduzioni non sono condivisibili ²⁶, potremmo dire che il detto non è da considerarsi vero.

²⁴Quindi supponiamo che siano implicazioni vere!

²⁵O almeno non condivisibili.

²⁶Si potrebbe ben guadagnare anche senza correre grossi rischi.

Esempio: "Rosso di sera, bel tempo si spera" ²⁷

1°) Vedo rosso, quindi domani farà bel tempo

2°) Non è bel tempo, quindi ieri sera non era rosso

Decidete voi se questo sia un detto affidabile...

Una chiosa sul simbolo di *implicazione logica*. Quando da alcune premesse, considerate vere, si deducono altre affermazioni, che saranno pure esse vere, allora quello che si fa è di **enunciare un Teorema**. Nel caso specifico, le proposizioni in premessa vengono dette **ipotesi** del teorema (e si indicano con *Hp*) e la conclusione (o le conclusioni) vengono dette *tesi* del teorema (e si indicano con *Th*). Abbiamo visto che ci sono solo due forme di ragionamento valido per dedurre qualche verità da una implicazione (materiale): il modus ponens ed il modus tollens. Dimostrare un teorema significa dedurre la verità delle tesi a partire dalla verità (indiscutibile) delle ipotesi: applicando il modus ponens per "far vedere" che una tesi sia vera, si otterrà quella che è conosciuta come *dimostrazione diretta* del teorema. Il modus tollens genera un tipo di dimostrazione più sottile, quella che viene denominata "indiretta" o *dimostrazione per assurdo*, la tecnica è la seguente: per dimostrare che la tesi è vera assumo che sia falsa ²⁸ e dato che l'implicazione è vera, troverò che l'ipotesi (o una delle ipotesi) è falsa... ora, le ipotesi di partenza sono sempre vere, indiscutibilmente! il ché significa che avevo *sbagliato* a dire che la tesi era falsa. Dato che "terzium non datur", se non può essere falsa, la tesi deve essere per forza vera e con questo si conclude la dimostrazione del teorema. Questa tecnica dimostrativa risulta molto comoda, se vogliamo anche "sofisticata" ed elegante, ma non è accettata da tutti i Matematici ²⁹. In ogni caso, qualsiasi teorema è scritto nella forma:

$$\boxed{\text{Hp}} \implies \boxed{\text{Th}}$$

e, dovendo le tesi essere attinenti a quanto dichiarano le ipotesi, si utilizza il simbolo di implicazione (logica) \implies . Se il teorema si può "invertire", ovvero posso assumere che le tesi diventino le ipotesi di un nuovo teorema e da esse ricavo, come tesi, le ipotesi del vecchio teorema, allora il teorema diventa un *criterio* ovvero una **condizione necessaria e sufficiente** per stabilire qualcosa.

²⁷nel senso che se la sera prima vedo rosso attorno alla luna, allora il giorno dopo è bel tempo.

²⁸Per assurdo sia falsa la tesi!

²⁹Ad esempio dagli "intuizionisti", movimento di pensiero matematico, fondato da L.E.J.Brouwer ai primi del '900.

Ad esempio, il **Teorema di Pitagora**, che afferma:

“In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti equivale al quadrato costruito sull’ipotenusa”³⁰

può essere invertito e diventa:

“Se in un triangolo, la somma dei quadrati costruiti su due lati equivale al quadrato costruito sul terzo lato, allora il triangolo è rettangolo”.

Dato che entrambe le affermazioni sono vere, possiamo anche scrivere che:

“Un triangolo è rettangolo se e solo se (sse) i quadrati costruiti su due lati equivalgono al quadrato costruito sul terzo lato”.

Il “se e solo se” si può anche scrivere utilizzando il simbolo di **coimplicazione logica**³¹: “ \Leftrightarrow ”. Si può anche scrivere una tabella di verità per la coimplicazione: essa è vera se e solo se le proposizioni assumono lo stesso valore di verità! Nei fatti, l’equivalenza logica, che avevamo detto significare “avere la stessa colonna di verità in corrispondenza degli stessi casi” è esattamente la coimplicazione logica tra due proposizioni: sono [V] o [F] negli stessi identici casi. Pertanto il simbolo “ \Leftrightarrow ” viene anche chiamato *di equivalenza*³².

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si osservi che $\neg(p \dot{\vee} q)$ è esattamente $p \Leftrightarrow q$.

³⁰Si dovrebbe meglio enunciare: “In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti su due lati equivale al quadrato costruito sul terzo lato.

³¹Ovvero di “doppia implicazione”: una in un verso “ \Rightarrow ” e una nell’altro “ \Leftarrow ”.

³²Ad esempio, nel caso del teorema di Pitagora e del suo inverso, potremmo dire che **Dire “triangolo rettangolo” EQUIVALE A DIRE “somma dei quadrati su due lati equiestesa al quadrato sul terzo lato”.**

Parte 2

Argomenti del secondo biennio

CAPITOLO 2

Analisi Numerica

(Quarto/Quinto Anno)

Fino al 2010, anno di emanazione della Riforma Gelmini, che entrò in vigore dal 1^o settembre 2010, nelle scuole tecniche industriali c'era un congruo numero di ore di laboratorio di Matematica, insegnata assieme ad un insegnante tecnico pratico (ITP), oltre alle "numerose" ore di Matematica "in aula" tenute unicamente dal docente "curriculare": è stato un duro colpo assorbire quella riforma che, riteniamo, sicuramente disastrosa per quanto riguarda l'effetto sulla preparazione matematica dei futuri "periti industriali". Comunque sia, abbiamo potuto godere di un triennio pre-riforma che ci ha fatto "divertire" parecchio nel far toccare con mano, tramite l'ausilio dei PC, come numerosi argomenti di tipo teorico potessero tornare utili per la determinazione di risultati da applicare nel mondo delle tecniche, implementando fogli di calcolo o programmi scritti a partire dai risultati "teorici" presentati nelle lezioni di "teoria". In questo capitolo presentiamo alcune lezioni sugli argomenti trattati, lasciando agli studenti solerti l'implementazione su computer di quanto appreso in queste pagine. Ci teniamo ad enfatizzare il fatto che questi metodi hanno ricevuto un enorme successo ed una grande spinta evolutiva nel momento in cui si sono diffusi gli elaboratori elettronici e, in particolare, con l'evoluzione dell'informatica, a partire dagli anni '70: è vero che i metodi di Analisi Numerica erano già stati formalizzati ed utilizzati fin dai primi passi dell'Analisi Matematica ¹, ma fare "tanti calcoli" solo con *carta e penna* risulta noioso, ancorché facilmente suscettibile di errori! Insomma, anche se sul piano teorico i procedimenti erano già stati pensati ed applicati, essi sono diventati prontamente fruibili solo quando la comunità matematica o scientifica, in generale, ha avuto modo di implementarli su di un calcolatore elettronico ²

¹Ad esempio alcuni metodi furono discussi già da Newton, oppure da Eulero... per non parlare che già nel mondo greco si utilizzavano "metodi numerici" per ottenere risultati spettacolari, ad esempio potremmo ricordare Eudosso o Archimede!

²Aggiungerei anche "di dimensioni ragionevoli", dato che agli albori dell'informatica i primi elaboratori occupavano grandi sale e solo pochi enti di ricerca/università potevano permettersi di comprare o costruire un computer.

1. Approssimazione numerica delle soluzioni di una equazione

La teoria delle equazioni algebriche ³ è ben sviluppata ed esaustiva: si sa che fino al secondo grado ci sono delle formule risolutive ben note e, per il terzo grado, possono essere utilizzate le formule di Cardano; per le equazioni di grado superiore, a meno che non siano forme molto particolari ⁴ l'unica speranza è di ridurre il grado delle equazioni operando fattorizzazioni tramite il Teorema di Ruffini. Ora, può capitare che sia necessario risolvere equazioni algebriche di grado superiore, che non riusciamo a fattorizzare oppure, molto più semplicemente, si debba risolvere una equazione "mista" ⁵ per le quali, chiaramente, non possono essere trovate "formule risolutive". Quando ci si trova in queste situazioni sarebbe già tanto poter trovare una soluzione approssimata, all'interno di un intervallo numerico di nostro interesse ⁶. Se la funzione è continua, il teorema di esistenza degli zeri o *Teorema di Bolzano*, assicura che, nell'intervallo in cui la funzione assume sugli estremi valori di segni differenti, essa deve annullarsi almeno una volta. Pertanto la prima cosa che possiamo fare è cercare un intervallo ai cui estremi la funzione assuma valori di segno differente. A questo punto possiamo procedere in diversi modi e, nel seguito, illustreremo i principali metodi per determinare una approssimazione numerica della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, nel caso la funzione sia "abbastanza buona" ⁷.

*Prima di iniziare a presentare i vari metodi numerici, premettiamo che non ci occuperemo del **problema della convergenza**, ovvero se il metodo porta sempre più vicino, oppure tende ad allontanare i numeri approssimanti ⁸ dalla soluzione desiderata. Inoltre non ci occuperemo della bontà dell'approssimazione, ovvero del massimo errore che si commette nel fermare l'approssimazione dopo un certo numero di iterazioni e, nemmeno, ci occuperemo della velocità con cui "converge" il metodo ⁹.*

1.1. Metodo di bisezione. Questo metodo viene anche denominato **dicotomico** ¹⁰ dato che consiste nel *dividere a metà* ripetutamente l'intervallo entro cui si sa che risiede la soluzione dell'equazione. Il procedimento è

³Ovvero "polinomio uguagliato a zero".

⁴Ad esempio "biquadratiche"

⁵Ovvero con famiglie di funzioni diverse utilizzate nella stessa equazione.

⁶Infatti cercare soluzioni su tutto il campo di esistenza della funzione $f(x)$ tale per cui $f(x) = 0$, non è agevole e, in definitiva, nemmeno utile.

⁷Ad esempio, che sia continua e derivabile almeno per quanto serve.

⁸Che in tal caso non possono più essere considerati come delle approssimazioni della soluzione! si invita comunque il lettore attento a capire perché il metodo non funzioni e quali richieste aggiuntive fare sulla funzione affinché il metodo converga.

⁹Tranne indicare quale metodo sia più veloce, sommariamente, di un altro, senza ulteriormente approfondire il discorso.

¹⁰Letteralmente "divisione a metà".

molto semplice, anche se non molto efficiente dal punto di vista del calcolo: scriviamo l'algoritmo qui di seguito.

Sia $f(x) = 0$ una equazione per la quale $f(x)$ risulta continua nell'intervallo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ ¹¹, allora:

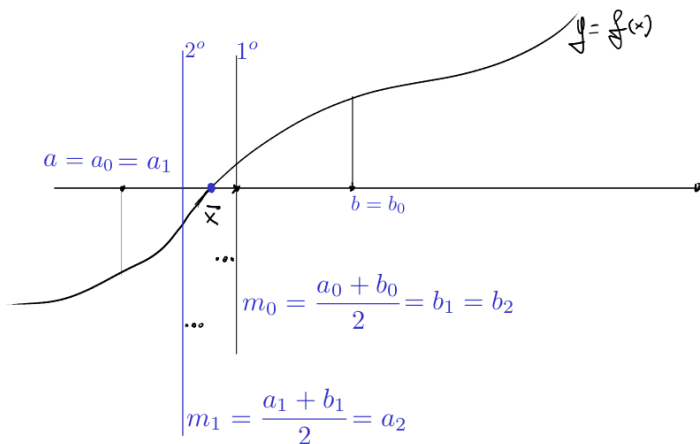
* Passo 1 - Si ponga $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Si calcoli il valore medio

$$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

* Passo 2 - Se $f(a_0) \cdot f(m_0) < 0$ allora si pone $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$, altrimenti $a_1 = m_0$ e $b_1 = b_0$.

* Passo 3 - Si ritorna al primo passo rimpiazzando $[a_0, b_0]$ con $[a_1, b_1]$, e, in generale $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ con $[a_i, b_i]$, essendo $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

I valori a_i e b_i risultano sempre, rispettivamente, uno minore e l'altro maggiore della soluzione \bar{x} dell'equazione e costituiscono, pertanto, delle approssimazioni per difetto o per eccesso della soluzione stessa. Chiaramente, più è piccola la differenza $b_i - a_i$, migliore sarà l'approssimazione della soluzione cercata¹².



Nella figura precedente è dato un esempio grafico di quello che si sta facendo: la prima approssimazione trovata è m_0 , la seconda m_1 e così via.

¹¹Ovvero agli estremi dell'intervallo assuma valore di segno differente.

¹²L'idea, quindi, è di "intrappolare" la soluzione dentro una successione di *intervalli inscatolati* di ampiezza viepiù decrescente.

Qui di seguito un esempio scriviamo l'algoritmo in pseudo-code, in modo che poi possa essere riscritto in uno dei linguaggi di programmazione preferito.

Algoritmo di "BISEZIONE"

Input: funzione $f(x)$, estremi a, b , tolleranza tol , massimo numero di iterazioni N

Output: approssimazione della radice

Se $f(a) \cdot f(b) > 0$ allora

Scrivi "Errore: dentro questo intervallo non ci sono soluzioni"

Termina algoritmo

Fine se

Per $i := 1$ fino a N fai

$$m := \frac{a + b}{2}$$

Scrivi $i, a, b, m, f(m)$;

Se $|f(m)| < tol$ oppure $\frac{b-a}{2} < tol$ allora

Restituisci m

Fine se

Se $f(a) \cdot f(m) < 0$ allora

$$b := m$$

Altrimenti

$$a := m$$

Fine se

Fine per

Restituisci m

Fine algoritmo

Esempio: Si trovi una soluzione approssimata all'equazione seguente nell'intervallo $[2, 3]$:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Soluzione: Innanzitutto osserviamo che se $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$, allora $f(2) = -5$ mentre $f(3) = 5$, per cui, per il Teorema di Bolzano, nell'intervallo deve ricadere almeno una soluzione dell'equazione. Ora calcoliamo il valore medio $m_0 = \frac{2+3}{2} = 2.5$ ed il valore della funzione in

tale punto: $f(2.5) = -3,8125$; dato che tale valore risulta negativo, questo m prenderà il posto dell'estremo 2 nell'intervallo di partenza, che verrà, pertanto, rimpiazzato con $[2.5, 3]$ e continuiamo così, diciamo per altre tre iterazioni...

$$m_1 = \frac{2.5 + 3}{2} = 2.75; \quad f(2.75) = -0.69921875$$

ancora negativo, per cui il nuovo intervallo da *bisecare* sarà $[2.75, 3]$.

$$m_2 = \frac{2.75 + 3}{2} = 2.875; \quad f(2.875) = 1779541015625,$$

essendo questo positivo, il nuovo intervallo da tagliare a metà sarà: $[2.75, 2.875]$.

$$m_3 = \frac{2.75 + 2.875}{2} = 2.8125; \quad f(2.8125) = 0.453628540039063.$$

Visto che questo valore risulta positivo, il nuovo intervallo da bisecare è $[2.74, 2.8125]$: faccio un altro -ultimo- passo iterativo per ottenere:

$$m_4 = \frac{2.75 + 2.8125}{2} = 2.78125; \quad f(2.78125) = -0.143675804138184.$$

Si noti che $a_5 - b_5 = 2.8125 - 2.78125 = 0.03125$ e pertanto la soluzione dell'equazione ricade in un intervallo, al massimo, ampio poco più di tre centesimi ¹³... vuol dire che l'ultima approssimazione trovata è un numero molto vicino alla soluzione reale dell'equazione:

$$\bar{x} \approx 2.78125.$$

Utilizzando un programma che implementa algoritmi più sofisticati di analisi numerica, ad esempio *Maxima*, si ottiene come soluzione approssimata:

$$\bar{x}_{\text{by Maxima}} \approx 2.78897316234458,$$

che si discosta da quello trovato prima, per poco più di sette millesimi!

1.2. Metodo delle secanti. Il precedente algoritmo è "lento" e, tra l'altro, come si può osservare anche dall'esempio che abbiamo utilizzato per illustrarlo, può capitare che momentaneamente, pur essendoci avvicinati molto alla soluzione reale, al passo successivo ci si allontana: questo non è, evidentemente, simpatico. Un metodo un pochino più "stabile" è quello di *tagliare* l'intervallo dentro cui sta la soluzione non a metà, ma tramite una retta che passi dai punti del piano da cui passa la funzione, in corrispondenza degli estremi dell'intervallo stesso. Poi, si procede praticamente come per il metodo di bisezione. Scriviamo l'algoritmo qui di seguito e, come

¹³In verità, rispetto al punto medio che noi consideriamo come approssimazione della soluzione, questo intervallo si estende della metà di questo valore come "raggio dell'intorno": quindi, l'errore massimo che si commette è di $0.03125/2 = 0,015625$ unità.

fatto prima, ne diamo una interpretazione grafica, il programma scritto in pseudo-code ed un esempio di applicazione.

Sia $f(x) = 0$ una equazione per la quale $f(x)$ risulta continua nell'intervallo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora:

- * Passo 1 - Si ponga $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Si determina la retta passante dai punti $A_0 = [a_0, f(a_0)]$ e $B_0 = [b_0, f(b_0)]$. Si deve determinare dove questa interseca l'asse delle ascisse ¹⁴. e si pone come prima approssimazione della soluzione tale valore x_0 . Pertanto

$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}.$$

- * Passo 2 - Se $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$ allora si pone $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$, altrimenti $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$.
- * Passo 3 - Si ritorna al primo passo rimpiazzando $[a_0, b_0]$ con $[a_1, b_1]$, e, in generale $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ con $[a_i, b_i]$, utilizzando i nuovi punti, da cui deve passare la retta *secante*,

$$A_i = [a_i, f(a_i)] \quad \text{e} \quad B_i = [b_i, f(b_i)]$$

l'algoritmo fornisce come soluzione approssimata il valore x_i ; si può verificare che, se $f(a_0) < 0$ allora per tutti i valori approssimati x_i , si avrà sempre $f(x_i) > 0$ ¹⁵, per cui l'algoritmo si può semplificare dichiarando unicamente la seguente formula ricorsiva ¹⁶:

$$x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1}) \cdot \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})},$$

essendo $x_0 = a$ e $x_1 = b$ ed iniziando con $i = 2$.

¹⁴La retta è

$$y - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \cdot (x - a_0).$$

Essa interseca l'asse delle ascisse quando $y = 0$, ovvero per

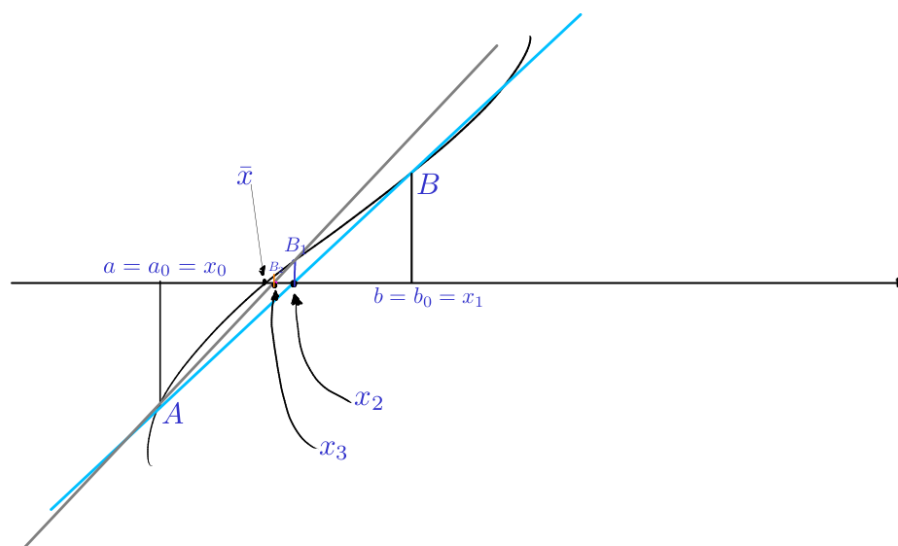
$$x = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)},$$

che può ancora essere semplificato sommando le due frazioni:

$$x = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{\det \begin{bmatrix} a_0 & f(a_0) \\ b_0 & f(b_0) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & f(a_0) \\ 1 & f(b_0) \end{bmatrix}}$$

¹⁵E, viceversa, se $f(a_0) > 0$ allora $f(x_i) < 0$.

¹⁶Ovvero che si applica utilizzando i valori trovati nei passi precedenti.



Come si vede, l'algoritmo procede molto velocemente, sicuramente molto più speditamente del metodo di bisezione. Scritto in pseudo-code risulta così:

Algoritmo del "metodo delle secanti"

Input: funzione $f(x)$, estremi a, b , tolleranza tol , massimo numero di iterazioni N

Output: approssimazione della radice

Per $i := 1$ fino a N fai

se $f(b) - f(a) = 0$ allora

Fine (divisione per zero)

approssimazione $:= a - f(a) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$;

se $|approssimazione - b| < tol$ allora

Scrivi approssimazione;

$a := b$

$b := approssimazione$

Fine per

Scrivi b

Fine algoritmo

Esempio: Risolviamo la stessa equazione utilizzata prima, utilizzando il metodo delle secanti... si trovi, quindi, una soluzione approssimata all'equazione seguente nell'intervallo $[2, 3]$:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Soluzione: Poniamo $x_0 = a = 2$ e $x_1 = b = 3$. La prima approssimazione è data da

$$x_2 = 2 - f(2) \cdot \frac{3 - 2}{f(3) - f(2)} = 2.5.$$

Nella figura d'appresso riportiamo i primi 6 passi di questo algoritmo implementato su un semplice foglio di calcolo.

a	b	f(a)	f(b)	approssimazione
2	3	-5	5	2,5
3	2,5	5	-3,8125	2,716312056738
2,5	2,716312057	-3,8125	-1,253022495062	2,822210183415
2,716312057	2,822210183	-1,2530225	0,6479651965	2,786114052564
2,822210183	2,786114053	0,647965196	-0,053487455759	2,78886646956
2,786114053	2,78886647	-0,05348746	-0,002002306943	2,788973513703

Facciamo notare come il valore determinato con il software *Maxima*, pari a $\bar{x}_{\text{by Maxima}} \approx 2.78897316234458$, già alla quinta approssimazione risulta identico fino alla sesta cifra decimale e, se ci fermiamo alla quinta approssimazione, per come fatto con il metodo di bisezione, si ottiene una differenza per poco più di un decimillesimo.

1.3. Metodo delle tangenti. Questo metodo è anche conosciuto come *Metodo di Newton*, dato che fu il primo ad applicarlo, dopo aver "inventato" il calcolo differenziale. Egli pensò di approssimare le soluzioni dell'equazione, utilizzando la retta tangente in un punto opportuno scelto nell'intervallo in cui si sa esserci la soluzione e di reiterare l'approssimazione utilizzando sempre la tangente nel punto corrispondente, sul grafico della funzione, alla precedente approssimazione appena trovata: l'approssimazione è data dall'intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse.

Sia $f(x) = 0$ una equazione per la quale $f(x)$ risulta continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile, inoltre sia $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora:

- * Passo 1 - Si ponga $x_0 = a$ e $x_1 = b$ e si determini la retta tangente nel punto $B_0 = (b, f(b)) = (x_1, f(x_1))$,
- * Passo 2 - Si intersechi la retta tangente testé trovata con l'asse delle ascisse e si chiami questo punto x_2 .

* Passo 3 - Si ritorna al primo passo rimpiazzando $B_0 = (x_1, f(x_1))$ con $B_1 = (x_2, f(x_2))$.

La soluzione approssimata, se la prima si immagina sia $x_1 = b$, è data, dopo n passi, da x_n . Si osservi che in questo metodo, una volta che la ricorsione è partita, il punto $A_0 = (x_0, f(x_0)) = (a, f(a))$, non serve proprio a nulla... potrebbe, magari essere scelto come punto di partenza per iniziare le approssimazioni (e magari, ogni tanto, potrebbe essere favorevole!), ma alla fine, conta solo un punto (nemmeno necessariamente vicino alla soluzione da approssimare). Proprio perché serve solo un punto, per iniziare le approssimazioni e, abbiamo scelto *arbitrariamente*, il punto B , la ricorsione può essere descritta in un solo passaggio. Ricordando che il coefficiente angolare della retta tangente in un punto $(x_1, f(x_1))$, al grafico della funzione $y = f(x)$, è dato dalla derivata prima valutata nell'ascissa del punto, ovvero è $m_{\text{tan}} = f'(x_1)$, allora la retta tangente può essere scritta, in B_0 , nella forma:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Essa interseca l'asse delle ascisse ove soddisfa all'equazione:

$$-f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

da cui si ricava il valore dell'ascissa x :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Se ora immaginiamo di procedere per $n - 1$ volte con questo algoritmo, l' n -esimo valore ottenuto sarà:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

la quale scrittura rappresenta la *formula ricorsiva* per l'algoritmo delle tangenti.

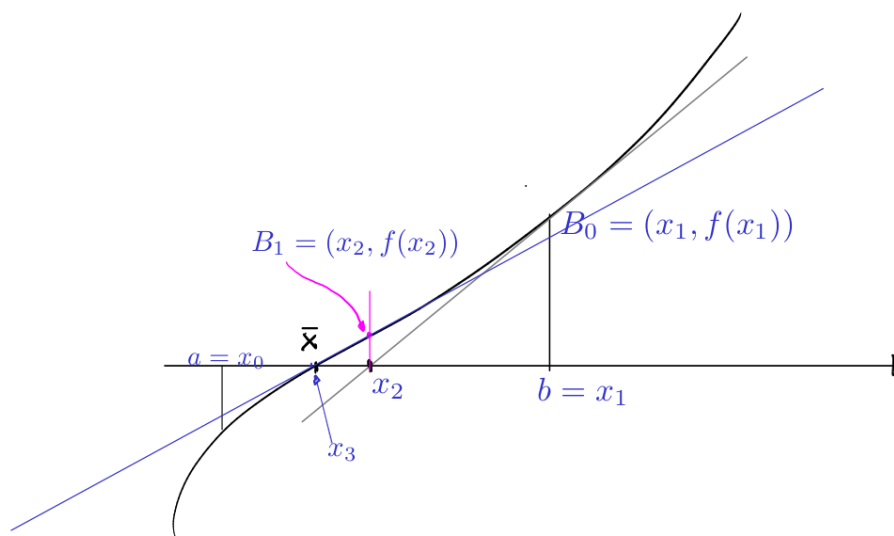
Come si vede, l'algoritmo procede molto velocemente, in verità molto più velocemente di entrambi quelli che abbiamo visto finora. Scritto in pseudocode, l'algoritmo si presenta in tal guisa:

Algoritmo delle "Tangenti di Newton"

Input: funzione $f(x)$, derivata $f'(x)$, approssimazione iniziale x_1 , tolleranza tol , numero massimo di iterazioni N .

Output: approssimazione della radice

```
x := x1;
i := 0;
```



Mentre $i < N$ fai

Se $f'(x) = 0$ allora

Scrivi "Derivata nulla: metodo non applicabile"

Fine

Fine se

$$x_{\text{nuovo}} := x - \frac{f(x)}{f'(x)};$$

Se $|x_{\text{nuovo}} - x| < \text{tol}$ allora

Scrivi x_{nuovo}

Fine se

$$x := x_{\text{nuovo}};$$

$$i := i + 1;$$

Fine mentre

Scrivi x

Fine algoritmo

Esempio: Risolviamo la stessa equazione utilizzata per illustrare i primi due metodi, questa volta sfruttando il metodo delle tangenti... si trovi, quindi, una soluzione approssimata all'equazione seguente nell'intervallo $[2, 3]$:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Soluzione: La derivata di è

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2,$$

utilizziamo come prima approssimazione $x_1 = 3$. Implementiamo su un foglio di calcolo i vari passaggi e faremo sempre cinque ricorsioni.

		f(x)	f'(x)
X_1	3	5	29
X_2	2,82758620689655	0,757372246674237	20,4717700602731
X_3	2,79059027325504	0,0304085336894335	18,8391579598722
X_4	2,7889761600471	5,62650721738223E-05	18,7694628283303
X_5	2,78897316235491	1,93835170136936E-10	18,7693335108508

Anche in questo caso confrontiamo il risultato ottenuto con quello fornito dal software *Maxima*, pari a $\bar{x}_{\text{by Maxima}} \approx 2.78897316234458$, già alla quarta approssimazione risulta identico fino alla quinta cifra decimale e, se ci fermiamo alla quinta approssimazione, per come fatto con gli altri due metodi, si ottiene una differenza di appena 0,00000000001033.

1.4. Metodo del punto fisso. Un metodo particolare, molto elegante, che è stato sviluppato non troppo tempo fa, che richiede, per essere applicato, comunque delle condizioni abbastanza restrittive sulle funzioni, è quello di “punto fisso”. In linea generale si pensa che la soluzione dell’equazione sia un *attrattore* di una sequenza numerica che si crea in modo opportuno e, quest’ultima, è come se “orbitasse” attorno al punto fisso fino a “collassarci” in prossimità. Il metodo si basa su un teorema riguardante delle particolari funzioni, dette “contrazioni”: esso fu enunciato nel 1922 da Banach e poi studiato ed approfondito dal napoletano Caccioppoli ¹⁷. Per poter utilizzare questo metodo, l’equazione

$$f(x) = 0$$

deve essere riscritta nella forma

$$\phi(x) = x.$$

Se $\phi(x)$ è continua e la sua derivata è strettamente minore di 1, in modulo, allora il metodo converge e si può determinare l’approssimazione della soluzione dell’equazione nella forma di punto fisso

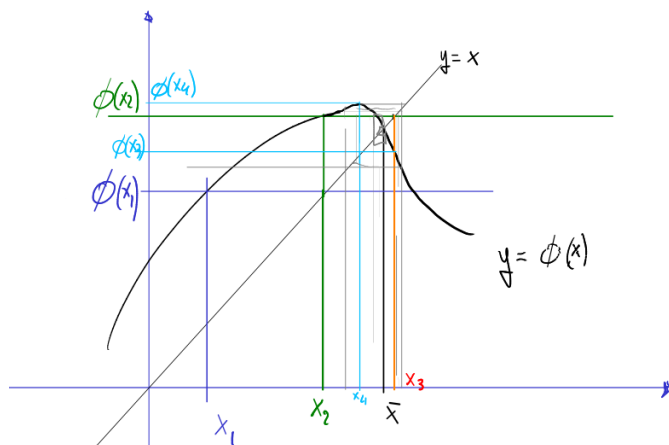
$$\alpha = \phi(\alpha).$$

¹⁷Infatti è conosciuto come **Teorema di Banach-Caccioppoli**.

Per “avvicinarsi a questo punto fisso ¹⁸ basta creare una successione di punti del tipo:

$$x_{i+1} = \phi(x_i).$$

Nella seguente figura, il meccanismo di funzionamento.



Si parte da un punto qualsiasi x_1 , si determina $\phi(x_1)$ e, tramite la bisettrice primo/terzo quadrante, il suo valore si riporta sull’asse delle ascisse come x_2 . Poscia si calcola $\phi(x_2)$ e con lo stesso trucco, tramite la retta $y = x$, ne si riporta il valore sull’asse delle ascisse, denominandolo x_3 . Si procede così per un po’ di ricorsioni, ottenendo una “orbita”, come quella disegnata nel grafico, attorno al punto fisso \bar{x} ¹⁹, che si avvicina sempre più al valore della soluzione dell’equazione. Questo di seguito è l’algoritmo scritto in pseudo-code.

Algoritmo metodo del “Punto Fisso”

Input: $\phi(x)$, x_1 la tolleranza tol e il numero massimo di iterazioni N .

Output Approssimazione della soluzione dell’equazione $f(x) = 0$ riscritta nella forma $x = \phi(x)$.

$k := 0$

$x_{vecchio} := x_1$

¹⁸Detto anche **punto unito**, dato che esso uguaglia il valore della funzione nel punto stesso!

¹⁹Tale per cui $\bar{x} = \phi(\bar{x})$, ovvero nel punto d’intersezione di $y = \phi(x)$ con la bisettrice $y = x$.

Ripeti

$$x_{\text{nuovo}} := \phi(x_{\text{vecchio}});$$

$$\text{tolleranza} := |x_{\text{nuovo}} - x_{\text{vecchio}}|;$$

$$x_{\text{vecchio}} := x_{\text{nuovo}};$$

$$k := k + 1;$$

Finché (tolleranza > tol) e (k < N)

Se tolleranza ≤ tol allora

Scrivi "Soluzione approssimata:" x_{nuovo} ;

Scrivi "Iterazioni:", k;

Altrimenti

Scrivi "Metodo non convergente in N iterazioni"

Fine Se

Fine Algoritmo

Esempio: Si voglia risolvere l'equazione $e^x - x^2 = 0$.

Soluzione: Disegnando i grafici delle due funzioni $y = e^x$ e $y = x^2$, si vede che essi si incontrano nell'intervallo $(-1, 0)$. Riscriviamo la funzione $f(x) = e^x - x^2$ nella forma richiesta:

$$x = \mp \sqrt{e^x},$$

individuando la funzione da utilizzare nella ricorsione in:

$$\phi(x) = -\sqrt{e^x}.$$

Scegliamo come primo valore "d'innescio"

$$x_1 = -1.$$

A questo punto il discorso va da se... riportiamo nella prossima figura una decina di ricorsioni.

X_1	-1
X_2	-0,606530659712633
X_3	-0,738403149974731
X_4	-0,691286050428152
X_5	-0,707765096310001
X_6	-0,701957408706619
X_7	-0,70399874580455
X_8	-0,703280563001844
X_9	-0,703533150353015
X_10	-0,703444304176034

Utilizzando il solito software *Maxima*, la soluzione approssimata è:

$$x_{\text{by Maxima}} \approx -0.7034674224983917.$$

2. Metodi di approssimazione numerica degli integrali definiti

Calcolare il valore di un integrale definito non è solo importante per assegnare una misura all'estensione di aree comprese tra due curve ²⁰, ma anche per assegnare valori di probabilità ad eventi, le cui *variabili aleatorie* (v.a.) associate, possano assumere valori con continuità; infatti, la probabilità che una data v.a. sia compresa tra due valori, nota la sua densità di probabilità, non è altro che l'integrale definito nell'intervallo compreso tra questi due valori, della densità di probabilità. Purtroppo non per tutte le funzioni si può applicare il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, che riconduce il calcolo dell'area sottesa ad una curva, espressa nella forma $y = f(x)$, alla determinazione di un'altra funzione, detta primitiva, la cui derivata è la funzione $f(x)$.

Una delle funzioni, per le quali non si riesce a calcolare una primitiva, è anche una delle più importanti, per non dire fondamentali funzioni, che si ritrova nel calcolo delle probabilità: essa è $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, che ha la forma tipica di una campana. Essa, in sé e per sé, non rappresenta alcuna densità di probabilità, dato che il suo integrale esteso da $-\infty$ a $+\infty$, non è unitario: si può però "normalizzarla", dividendo per il valore del suo integrale considerato su tutta la retta reale, che può essere calcolato sfruttando un trucchetto sugli integrali doppi ²¹ e che vale $\sqrt{2\pi}$. Questa funzione "normalizzata": ²²

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

rappresenta invece la densità di probabilità di una v.a. \mathcal{X} , denominata **v.a. Normale** $N(0, 1)$, il cui valore atteso è 0 e la cui varianza è 1; Se una v.a. \mathcal{X} è distribuita secondo una "normale 0,1" ²³ la probabilità che essa assuma un valore compreso tra il valore a ed il valore b si può calcolare "semplicemente" come:

$$Pr(a \leq \mathcal{X} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

²⁰Volendo limitarci, come discorso, al calcolo integrale di una funzione reale di variabile reale, ovvero di "figure" che siano tutte rappresentabili in un piano cartesiano nella forma esplicita $y = f(x)$.

²¹Per la precisione la possibilità di applicare il Teorema di Fubini e quindi far diventare un integrale doppio come un prodotto di due integrali (identici tra loro).

²²Conosciuta con il nome di **campana di Gauss**.

²³Ovvero, come si scrive: $\mathcal{X} \sim N(0, 1)$.

Rimane comunque un grosso problema: non potendo calcolare una primitiva per la funzione $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, questa probabilità come si dovrebbe calcolare? Una prima osservazione è che se tutta l'area sottesa vale 1, allora, se ne consideriamo metà, vale $\frac{1}{2}$ e, inoltre, la forma della campana è perfettamente simmetrica rispetto all'asse delle ordinate: queste osservazioni ci permettono di ridurre il problema del calcolo di questo integrale a quello di determinare il valore di quest'altro integrale, che definisce la "funzione degli errori" :

$$\text{erf}(t) = Pr(0 \leq \mathcal{X} \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Si può anche riscrivere questa funzione, dopo il semplice cambio di variabile $\frac{1}{2}x^2 = z^2$, in modo "più pulito" e conosciuto:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

Rimane comunque il problema di calcolare l'integrale presente in questa definizione... non potendo trovare una primitiva, si dovrà *necessariamente* determinare il valore di quell'integrale tramite *metodi di analisi numerica*: in effetti così è stato fatto e si sono tabulati, per comodità, i valori in una tabella a doppia entrata, sfruttabile dallo studioso di calcolo delle probabilità o statistica. Ma come hanno fatto a scrivere questa tabella? Illustriamo, in questa sezione, possibili metodi per determinare ²⁴ una approssimazione del valore di un integrale definito. Vogliamo comunque avvertire che *tutti questi metodi diventano utili nel momento in cui si sappia utilizzare almeno un foglio di calcolo*, altrimenti sono davvero molto noiosi e lunghi da applicare! Noi utilizzeremo l'applicativo "LibreOffice Calc", dalla suite software **LibreOffice** liberamente distribuita assieme a **Linux**.

2.1. Metodo dei rettangoli. Il primo metodo proviene direttamente dalla definizione di integrale definito: se consideriamo le *somme integrali inferiori* ²⁵ possiamo dare una prima approssimazione del valore dell'area sottesa sommando un certo numero di rettangoli "inscritti".

Basta suddividere l'intervallo di integrazione in un numero prefissato di parti uguali ²⁶ e sommare le aree dei rettangoli le cui basi sono tutte uguali a:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

²⁴In generale, non solo per la funzione $\text{erf}()$.

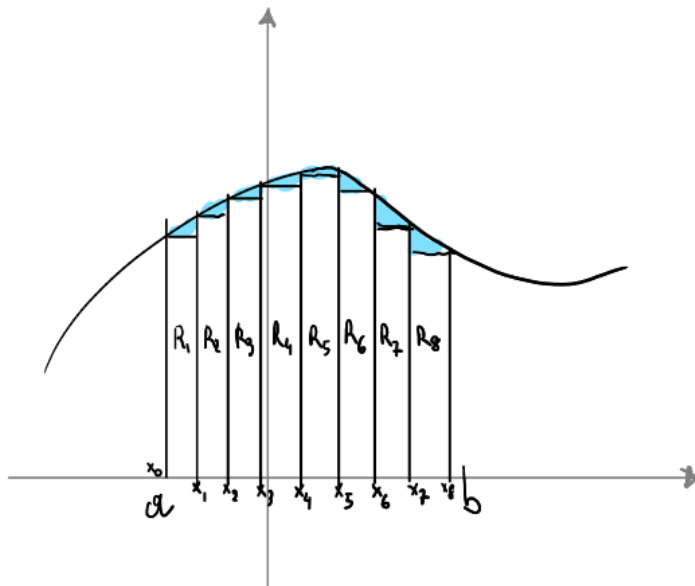
²⁵O quelle superiori -per ottenere una approssimazione per eccesso.

²⁶Nel disegno fatto abbiamo ripartito in 8 parti uguali.

e le altezze si calcolano come il valore minimo della funzione sull'intervallo i -esimo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$h_i = \min_{x \in I_i} f(x).$$

Di seguito una rappresentazione grafica.



C'è da notare che in questo modo vengono trascurate le aree che sono state evidenziate nel disegno di sopra: la somma di queste aree, comunque, tende ad essere sempre più piccola, a mano a mano che si aumenta il numero dei rettangoli da sommare e, pertanto, che n è preso sempre più grande.

Esempio: Determinare il valore approssimato dell'area sottesa a $y = x^3 + x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$. Ovvero, determinare un valore approssimato di:

$$S = \int_0^1 x^3 + x^2 dx.$$

Soluzione: Intanto, di questo integrale possiamo addirittura calcolare il valore esatto: una primitiva è

$$F(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3.$$

$$\text{Quindi } S = F(1) - F(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \approx 0.583.$$

Ora applichiamo il metodo dei rettangoli per ottenere una approssimazione di questo valore: prima di tutto dobbiamo decidere in quanti sottointervalli dividere l'intervallo di integrazione ²⁷ Scegliamo, ad esempio, $n = 20$. In tal modo $\Delta x = \frac{1-0}{20} = 0.05$. Ora abbiamo i punti della partizione ²⁸:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1, x_3 = 0.15, \dots, x_{20} = 1.$$

Dato che la funzione è crescente, nell'intervallo considerato ²⁹, il minimo della funzione si troverà sempre nel primo estremo dei sottointervalli che andremo a considerare, per cui la somma delle aree dei rettangoli sarà:

$$\begin{aligned} \sum_i^{20} R_i &= [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{19})] \cdot \Delta x = \\ &= [f(0) + f(0.05) + f(0.1) + \dots + f(0.19)] \cdot 0.05 = \\ &= (0 + 0.002625 + 0.011 + 0.025875 + 0.048 + 0.078125 + 0.117 + 0.165375 + \\ &+ 0.224 + 0.293625 + 0.375 + 0.468875 + 0.576 + 0.697125 + 0.833 + 0.984375 + \\ &+ 1.152 + 1.336625 + 1.539 + 1.759875) \cdot 0.05 = 0.534375 \end{aligned}$$

Si lascia come esercizio scrivere un algoritmo in pseudo-code, per l'implementazione del metodo dei rettangoli.

2.2. Metodo dei trapezi. Questo metodo è conosciuto anche come **metodo di Bézout**, e consiste nel considerare i trapezi formati da due "altezze consecutive", del metodo dei rettangoli, come basi del trapezio e come altezze (uguali) l'ampiezza Δx della partizione in sottointervalli. In questo modo si migliora, fin da subito, la situazione, in quanto si va a trascurare meno area, quando si sommano i trapezi "inscritti" nell'area da integrare, rispetto a quando si sommano i rettangoli.

Procediamo in tal modo: fissiamo un numero n di sottointervalli, che avranno, quindi, grandezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Questa è l'altezza comune di tutti i trapezi (rettangoli) che andremo a sommare:

$$h = \Delta x.$$

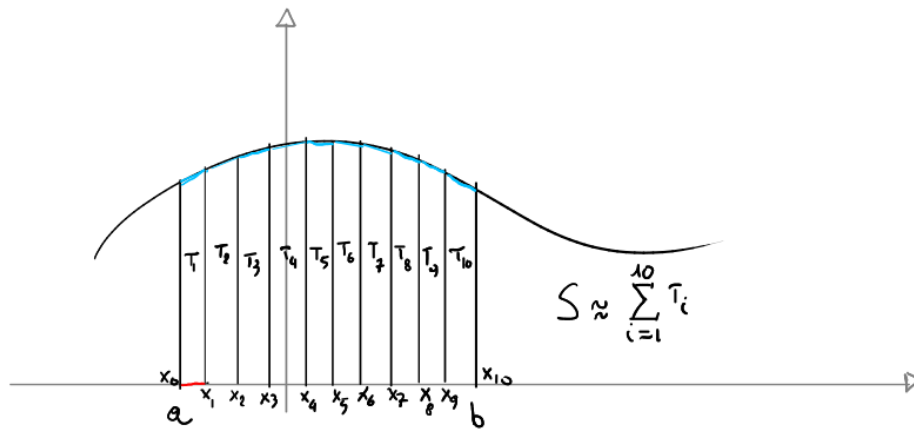
Poi osserviamo che tranne la prima base e l'ultima, ogni altra base si conta due volte: una come base maggiore del trapezio T_i ed un'altra come base minore del trapezio T_{i+1} (o viceversa).

Nel disegno seguente una illustrazione del metodo.

²⁷Chiaramente più sono numerosi sottointervalli, quindi più essi sono piccoli, migliore è la stima che si ottiene.

²⁸Che si ottengono a partire da $a = x_0$ sommando di volta in volta sempre Δx .

²⁹Basta studiare il degno della derivata prima, per convincersi di ciò.



Pertanto, atteso che queste basi sono date dal valore della funzione nei punti della ripartizione, possiamo scrivere:

$$S \approx \sum_{i=1}^n T_i = \frac{[(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))]}{2} \cdot h;$$

ovvero:

$$S \approx \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \cdot \Delta x.$$

In definitiva, basta sommare alla media aritmetica dei valori della funzione agli estremi dell'intervallo di integrazione, tutti i valori che essa prende in corrispondenza dei punti interni (della partizione) e moltiplicare tale somma per l'ampiezza dei sottointervalli.³⁰

Esempio: Si determini una approssimazione dell'area sottesa dalla stessa funzione di prima $y = x^3 + x^2$ tramite il metodo dei trapezi, considerando solo $n = 10$ sottointervalli di partizione.

Soluzione: Dato $\Delta x = 0.1 = h$, ora calcoliamo la funzione sui punti:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, \dots, x_{10} = 1.$$

³⁰C'è da notare che in questo metodo non è essenziale individuare quale valore della funzione è il minore su ciascun intervallo, dato che comunque si devono considerare entrambi i valori della funzione agli estremi di ciascun sottointervallo! inoltre il metodo è molto più preciso perché **linearizza** la funzione di partenza: è come se si raddrizzasse pezzettino per pezzettino la funzione, per sostituirla tramite una polinomiale che ha i vertici in corrispondenza dei punti della partizione prefissata.

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= 0, f(x_1) = 0.011, f(x_2) = 0.048, f(x_3) = 0.117, \\
 f(x_4) &= 0.224, f(x_5) = 0.375, f(x_6) = 0.576, f(x_7) = 0.833, \\
 f(x_8) &= 1.152, f(x_9) = 1.539, f(x_{10}) = 2.
 \end{aligned}$$

La media tra primo ed ultimo valore è $\frac{0+2}{2} = 1$, mentre la somma di tutti gli altri valori è 4.875. Se ora applichiamo la formula nel riquadro otteniamo:

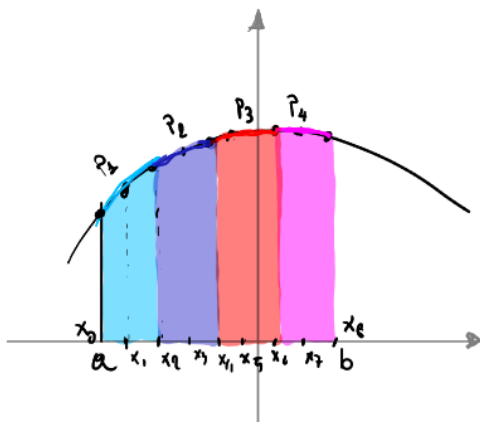
$$S \approx (1 + 4.875) \cdot 0.1 = 0.5875,$$

valore molto vicino a quello reale, che avevo trovato essere di 0.583 ed abbiamo utilizzato solo 10 sottointervalli!

Anche in questo caso lasciamo come compito del lettore attento la scrittura di un algoritmo in pseudo-code per l'implementazione con un linguaggio di programmazione a piacimento.

2.3. Metodo delle parabole. Questo metodo, conosciuto anche con il nome di **metodo di Cavalieri-Simpson** è il più preciso dei tre e si basa sul fatto (banale) che per tre punti passa una sola parabola. Ora, la parabola non "tira dritto" tra due punti, ma asseconda abbastanza bene le "curve" se esse passano da tre punti sufficientemente vicini tra loro. Quindi l'idea è di sostituire per ogni tre punti della curva una archetto di parabola e poi calcolare l'area sottesa da questi archetti. I tre punti saranno quelli presi -a tre a tre- dai punti sulla curva in corrispondenza della partizione dell'intervallo di integrazione, in n sottointervalli uguali. E' conveniente suddividere l'intervallo di partenza $[a, b]$ in un numero pari di sottointervallini, in modo da poter considerare sempre un numero intero di terne di punti da cui far passare le parabole.

Come al solito, un disegno aiuterà a capire meglio la situazione.



Dobbiamo trovare le aree sottese dagli archetti di parabola negli intervalli $[x_i, x_{i+2}]$, per $i = 0, 1, \dots, n-2$ e passanti per x_i, x_{i+1} e x_{i+2} . Poi sommare tutte queste aree. Ora, il calcolo è identico per ciascuna terna, quindi, tramite condizione di passaggio, troviamo l'equazione di un archetto di parabola passante dai punti $(x_k, f(x_k))$ per $k = i, i+1, i+2$. L'equazione generica della parabola è

$$y = ax^2 + bx + c$$

e dovendo passare dai tre punti dati, possiamo scrivere un sistema lineare in a, b e c . Facciamo i furbi: immaginiamo che la parabola sia della forma:

$$y = a(x - x_{i+1})^2 + b(x - x_{i+1}) + c,$$

in modo che imponendo la condizione di passaggio per i tre punti, almeno una delle equazioni del sistema si semplifichi notevolmente ³¹. Infatti otteniamo:

$$\begin{cases} y_i = a(x_i - x_{i+1})^2 + b(x_i - x_{i+1}) + c \\ y_{i+1} = a(\cancel{x_{i+1} - x_{i+1}})^2 + b(\cancel{x_{i+1} - x_{i+1}}) + c \\ y_{i+2} = a(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + b(x_{i+2} - x_{i+1}) + c \end{cases} \Rightarrow y_{i+1} = c$$

che si riduce a:

$$\begin{cases} (x_i - x_{i+1})^2 a + (x_i - x_{i+1}) b = y_i - y_{i+1} \\ (x_{i+2} - x_{i+1})^2 a + (x_{i+2} - x_{i+1}) b = y_{i+2} - y_{i+1} \end{cases}$$

Prima di procedere oltre, ricordiamo che $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ e, pertanto $2\Delta x = x_{i+2} - x_i$, e chiamiamo $\Delta x = h$, in modo da semplificare un po' le scritture, che ora diventano:

$$\begin{cases} h^2 a - h b = y_i - y_{i+1} \\ h^2 a + h b = y_{i+2} - y_{i+1} \end{cases}$$

Sommando le equazioni si ottiene:

$$2h^2 a = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}$$

da cui

$$a = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^2}.$$

Analogamente, sottraendo le due equazioni, si può ottenere il valore di b , ma non serve, come presto vedremo, continuando i calcoli. Ora, volendo calcolare l'integrale sotteso da una singola "parabolina" otteniamo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} a(x - x_{i+1})^2 + b(x - x_{i+1}) + c \, dx =$$

³¹Quella che passa da $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$.

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a}{3} \cdot (x - x_{i+1})^3 + \frac{b}{2} \cdot (x - x_{i+1})^2 + cx \right]_{x_i}^{x_{i+2}} = \\
&= \frac{a}{3} \cdot h^3 + \frac{b}{2} h^2 + cx_{i+2} - \frac{a}{3} \cdot (-h)^3 - \frac{b}{2} h^2 - cx_i = \\
&= \frac{2}{3} a h^3 + c \cdot 2h = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^2} \cdot h^3 + y_{i+1} \cdot 2h = \\
&= \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} + 6y_{i+1}}{3} \cdot h = \frac{h}{3} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}).
\end{aligned}$$

Evidentemente questa formula si ripete per ogni terna di punti ad iniziare da $i = 0$ per finire a $i = n - 2$. Questo significa che, se sommiamo tutte queste aree sottese, otteniamo che:

- (1) $y_0 = f(x_0)$ e $y_n = f(x_n)$ compaiono una sola volta nella sommatoria,
- (2) y "pedice pari" compare nella somma due volte: una volta come valore finale in un intervallo e un'altra come valore iniziale dell'intervallo successivo,
- (3) y "pedice dispari" compare ogni volta sempre moltiplicato per il coefficiente numerico 4.

In conclusione siamo giunti alla seguente formula:

$$S \approx \frac{\Delta x}{3} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=\text{"dispari"}} f(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=\text{"pari"} \neq 0, n} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

Esempio: Trova, sempre per la funzione $y = x^3 + x^2$ un valore approssimato dell'integrale definito sull'intervallo $[0, 1]$ con il metodo di Cavalieri-Simpson, suddividendo l'intervallo in soli 4 sottointervallini.

Soluzione: Intanto, dividendo in soli quattro sottointervallini, la grandezza di ciascuno di essi è $\Delta x = 0.25$. I punti della partizione sono:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1.$$

In corrispondenza di questi ricaviamo i valori della funzione:

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = 0.078125, f(x_2) = 0.375, f(x_3) = 0.984375, f(x_4) = 2.$$

Ora sommiamo per come indicato nella formula nel riquadro:

$$S \approx \frac{0.25}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 0.078125 + 2 \cdot 0.375 + 4 \cdot 0.984375 + 2) = 0,583.$$

Una approssimazione pressoché perfetta, con una suddivisione di soli quattro sottointervallini! Come al solito, il lettore interessato può scrivere l'algoritmo in pseudo-code ed implementarlo con il linguaggio di programmazione che più gli piace.

Parte 3

Argomenti del Quinto Anno

CAPITOLO 3

Funzioni a due variabili e superfici

Prima di introdurre lo studio delle funzioni a due variabili e delle superfici, è opportuno fare una breve “incursione” nel mondo dei vettori e della geometria dei vettori nello spazio.

1. Somma, prodotto scalare, lunghezze ed angoli

Cominciamo con l’osservare che un punto nello spazio è descritto da una terna di numeri (x_1, x_2, x_3) che indicano, fissato un sistema di coordinate ortogonali (cartesiano) -ovvero, prefissati tre assi mutuamente perpendicolari- a partire dall’origine di esso, di quanto muoversi nelle tre direzioni dello spazio. Si può immaginare che il punto indicato dalla terna (x_1, x_2, x_3) si trova nello spigolo, opposto a quello posto nell’origine del sistema di coordinate, del parallelepipedo formato prendendo come lati -sui tre assi cartesiani- le lunghezze (con segno) x_1, x_2 e x_3 . Inoltre possiamo pensare che il punto $P(x_1, x_2, x_3)$ identifica in modo univoco un vettore applicato nell’origine del sistema di coordinate, con la freccia che punta proprio nel punto P . In tal modo il vettore \overrightarrow{OP} è definito -in modo naturale- dalle

componenti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, che corrispondono alle tre coordinate cartesiane del

punto P . Esattamente come nel caso bidimensionale, definiamo la somma di vettori operando “componente per componente”, ovvero sommando le componenti che occupano lo stesso posto e, geometricamente, rappresentando il risultato di tale operazione come la diagonale del parallelogramma, due lati del quale sono i vettori che si sommano.

Moltiplicare un numero per un vettore, il ché si fa moltiplicando ciascuna componente per quel dato numero, significa semplicemente *allungare o comprimere* il vettore e, al più, anche, cambiargli il verso di percorrenza, senza comunque mai modificare la sua “inclinazione”. Ora, nel piano si poteva immediatamente definire la direzione di un vettore come il rapporto tra la seconda e la prima componente: nello spazio questa definizione è priva di senso, in quanto è presente anche una terza componente. Ci accontentiamo allora di dire che la *direzione* di un vettore nello spazio è la retta su cui esso giace e quindi, essa è già descritta dal vettore stesso! Infatti, la retta passante

dal punto P e dall'origine $O(0, 0, 0)$, è data da

$$\lambda \overrightarrow{OP}$$

al variare di λ nei numeri reali, in pratica è un multiplo qualsiasi del vettore/punto P . La retta passante per un punto A ed un altro punto B è data, come direzione, dal vettore \overrightarrow{AB} , che si determina, come nel caso bidimensionale, operando la differenza $B-A$ componente per componente; dovendo passare da A , tale retta è allora

$$A + \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Più avanti, comunque, daremo una descrizione della direzione di un vettore che non sia la determinazione della retta su cui esso giace. Prima di fare ciò, osserviamo che data la terna di assi cartesiani ortogonali, i tre vettori definiti dalle "unità", prese una su ciascun asse, ovvero

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formano una *base*¹ per lo spazio dei vettori a dimensione tre.

In verità si ha sempre che un vettore

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

si può scrivere² nella forma

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}.$$

Definiamo il *prodotto scalare* tra due vettori come *somma dei prodotti delle*

componenti omologhe: se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ allora

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i w_i.$$

Pur omettendo la dimostrazione, si può far vedere che *se il prodotto scalare è nullo, allora i vettori sono perpendicolari* (e viceversa). Inoltre, come nel caso bidimensionale, il prodotto scalare tra due vettori può essere usato per determinare la lunghezza³ dei vettori, nonché l'angolo che si forma tra due vettori. Infine, il prodotto scalare indica anche la lunghezza della proiezione

¹Questo significa che ogni altro vettore può essere scritto come somma di multipli opportuni di questi tre vettori.

²Si dice *scomposto lungo la base canonica*.

³Il *modulo* $|\vec{v}|$.

di uno dei vettori lungo la direzione dell'altro vettore ⁴. Tutto questo ora lo rendiamo più palese, perché è fondamentale per quanto diremo in seguito. La lunghezza di un vettore ⁵ è espressa da:

$$l(\vec{v}) = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Prima di procedere oltre, vogliamo osservare che il prodotto scalare di un

vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ con \vec{i} produce come risultato v_1 , così come il prodotto

con \vec{j} dà v_2 e, analogamente, moltiplicando per \vec{k} si ottiene v_3 . Dato che le componenti v_i elencate prime non sono altro che le *proiezioni* del vettore lungo le direzioni degli assi coordinati, allora possiamo anche dire

che la moltiplicazione di un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ con gli elementi della base ci

permette di "scomporre" il vettore stesso, proiettandolo sugli assi coordinati: addirittura possiamo scrivere che:

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle \cdot \vec{i} + \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle \cdot \vec{j} + \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle \cdot \vec{k}.$$

Inoltre, se moltiplichiamo \vec{v} scalarmente per il vettore $\frac{1}{l(\vec{w})} \cdot \vec{w}$ ⁶, potendo immaginare che tramite una opportuna rototraslazione quest'ultimo vada a coincidere con uno dei tre vettori della base ⁷, otterremo che $\langle \vec{v}, \frac{\vec{w}}{l(\vec{w})} \rangle$ è la proiezione di \vec{v} lungo la direzione di \vec{w} . Possiamo quindi scrivere più sinteticamente:

$$l(\pi_{\vec{w}}(\vec{v})) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}}.$$

D'altra parte, la proiezione di un vettore su di un altro è data, in lunghezza, dalla lunghezza del vettore, moltiplicata per il coseno dell'angolo che si forma tra i due vettori, allora possiamo ancora scrivere:

$$l(\pi_{\vec{w}}(\vec{v})) = l(\vec{v}) \cdot \cos(\widehat{u, w}),$$

da cui:

$$\cos(\widehat{u, w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}},$$

⁴Se \vec{u} è un vettore e \vec{v} un altro, allora indicheremo la proiezione di \vec{v} sulla retta su cui giace \vec{u} , come: $\pi_{\vec{u}}(\vec{v})$.

⁵Che si può determinare utilizzando -ancora una volta- il Teorema di Pitagora.

⁶Ovvero per il versore che dà la direzione del vettore \vec{w} .

⁷Che chiaramente, essendo soggetti alla stessa trasformazione, non saranno più con le stesse "coordinate" di prima.

ovvero, ancora meglio:

$$\cos(\widehat{u, w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}.$$

Si possono anche determinare gli angoli che il vettore \vec{v} forma con gli assi cartesiani nel modo seguente. Si consideri, ad esempio, la proiezione v_1 del vettore \vec{v} lungo l'asse delle ascisse (identificato dal vettore \vec{i}) e sia α l'angolo che il vettore \vec{v} forma con tale asse, si ha:

$$v_1 = l(\vec{v}) \cdot \cos(\alpha)$$

per cui:

$$\langle \vec{v}, \vec{i} \rangle = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \cos(\alpha)$$

da cui

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{i} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}.$$

Allo stesso modo si può ragionare per verificare che l'angolo β tra il vettore \vec{v} e la direzione del vettore \vec{j} soddisfa all'uguaglianza

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{j} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}.$$

L'angolo γ formato dal vettore \vec{v} con la direzione del versore \vec{k} è, invece, data dall'uguaglianza

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{k} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}.$$

Questi tre coseni sono noti anche come i *coseni direttori* del vettore \vec{v} .

Osserviamo, ora, che le componenti del vettore $\frac{\vec{v}}{l(\vec{v})}$ sono esattamente i tre coseni direttori del vettore \vec{v} , per cui possiamo anche scrivere

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot (\cos(\widehat{v, i}) \vec{i} + \cos(\widehat{v, j}) \vec{j} + \cos(\widehat{v, k}) \vec{k}),$$

e, per i versori ⁸, addirittura

$$\hat{v} = \cos(\widehat{v, i}) \vec{i} + \cos(\widehat{v, j}) \vec{j} + \cos(\widehat{v, k}) \vec{k}.$$

⁸Vettori di modulo/lunghezza unitari.

2. Piani, prodotto vettoriale ed aree

Come un vettore genera uno spazio monodimensionale detto *retta*, semplicemente considerando tutti i suoi “multipli” $\lambda \vec{v}$, così due vettori -che non siano l'uno un multiplo dell'altro⁹- generano uno spazio bidimensionale detto *piano*. In effetti si può, molto semplicemente, determinare il piano passante per i punti A , B e C dello spazio considerando i due vettori

$$\vec{v} = B - A \quad \text{e} \quad \vec{w} = C - A$$

(che sono linearmente indipendenti se i punti non sono allineati!), i quali generano lo “spazio” bidimensionale

$$\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$$

tramite combinazione lineare dei loro multipli. Facendo passare tale piano dal punto A , si ottiene, infine, l'equazione del piano passante per A e generato dalle due direzioni indipendenti \vec{v} e \vec{w} :

$$\boxed{\pi : A + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}.}$$

Ora, sapendo che il prodotto scalare di due vettori è nullo se e solo se le loro direzioni sono perpendicolari, possiamo determinare un vettore \vec{u} perpendicolare al piano generato dai vettori \vec{v} e \vec{w} , imponendo che il prodotto scalare di \vec{u} con \vec{v} e \vec{w} sia contemporaneamente nullo:

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \end{cases}$$

Se indichiamo il vettore \vec{u} tramite le componenti

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e, al solito, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, il sistema precedente si riscrive come

$$\begin{cases} v_1 a + v_2 b + v_3 c = 0 \\ w_1 a + w_2 b + w_3 c = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, moltiplichiamo la prima riga per w_1 e la seconda per v_1 e poi sottraiamo la seconda equazione dalla prima, ottenendo:

$$(v_2 w_1 - v_1 w_2) b + (v_3 w_1 - v_1 w_3) c = 0.$$

⁹O, come si dice in gergo, che siano *linearmente indipendenti*.

Dato che il sistema consisteva di due equazioni in tre incognite, ne consegue che una di esse si può scegliere arbitrariamente. Scegliamo allora che c uguagli la prima parentesi, cambiata di segno, dell'ultima equazione ottenuta e, quindi, b sia uguale proprio alla seconda parentesi. Pertanto abbiamo:

$$\boxed{c = -(v_2 w_1 - v_1 w_2)} \quad (\text{scelto arbitrariamente da noi})$$

e

$$\boxed{b = v_3 w_1 - v_1 w_3} \quad (\text{ricavato dall'equazione}).$$

Dalla prima equazione ricaviamo il valore di a :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{v_2 b + v_3 c}{v_1} = -\frac{v_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) - v_3(v_2 w_1 - v_1 w_2)}{v_1} = \\ &= \frac{-v_2 v_3 w_1 + v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 - v_1 v_3 w_2}{v_1}, \end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{a = v_2 w_3 - v_3 w_2}.$$

Ora, se formalmente inseriamo in una matrice, nella prima riga, i tre simboli dei versori degli assi coordinati e nelle altre due righe -ordinatamente- le componenti del vettore \vec{v} e del vettore \vec{w} otteniamo che il determinante di tale matrice, sviluppato secondo la prima riga, genera proprio in vettore \vec{u} , infatti tale determinante ¹⁰ è:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}$$

e questo è esattamente il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ che stavamo cercando.

Il determinante della matrice appena scritta si indica tramite questa scrittura:

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{w}}$$

¹⁰Il **determinante** di una matrice (quadrata) è definito come la somma a segno alternante dei prodotti di tutti i numeri che si trovano ciascuno in una sola riga o colonna: ad esempio, nella matrice 2×2 , $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il determinante è dato da $\det(M) = a \cdot d - b \cdot c$.

Per il caso 3×3 si può ricorrere alla **regola di Sarrus**, che consiste nell'affiancare alla matrice le prime due colonne di se stessa e poi moltiplicare i numeri seguendo la diagonale maggiore (quella che inizia dal primo numero e finisce all'ultimo della matrice), sommando il prodotto delle sue parallele "in avanti" e sottraendo il prodotto dei numeri sulla diagonale minore (quella che inizia dal numero nella prima riga e terza colonna) e sottraendo ancora i prodotti che escono sulle diagonali ad essa parallela.

e si chiama **prodotto vettoriale** tra i vettori \vec{v} e \vec{w} .

Per cui possiamo scrivere:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

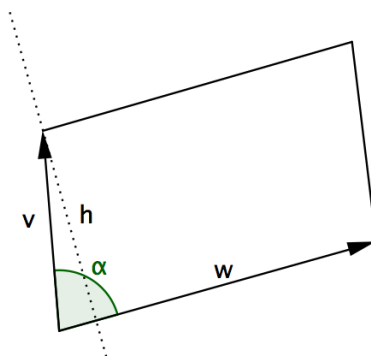
esso esprime un vettore che è contemporaneamente perpendicolare ai vettori componenti le ultime due righe della matrice! C'è da notare che se invertiamo le ultime due righe, il determinante cambia di segno, per cui:

$$\vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{w},$$

questo fatto corrisponde a scegliere un “verso” per il piano: la scelta di uno dei due prodotti vettoriali indica un lato del piano, l'altro è dalla “parte opposta” e quindi corrisponde all'altro prodotto vettoriale. Questo sarà ancora più chiaro ed evidente nel momento in cui si parlerà di superfici (orientabili) in cui si può determinare una parte *esterna* ed una *interna*.

Consideriamo ora un parallelogramma, due lati del quale siano i vettori \vec{v} e \vec{w} e calcoliamone l'area: l'altezza, ha lunghezza $|\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$ per cui l'area è data da

$$\text{Area} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha).$$



Ora dimostreremo che la lunghezza del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è esattamente la misura dell'area di questo parallelogramma.

Calcoliamo il quadrato del modulo del prodotto vettoriale:

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = \langle \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$$

ovvero

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

e quindi

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}|^2 = (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2.$$

Lo sviluppo di questi quadrati di binomio fornisce l'espressione:

$$(v_2w_3)^2 - 2(v_2v_3w_2w_3) + (v_3w_2)^2 + (v_3w_1)^2 - 2(v_1v_3w_1w_3) + (v_1w_3)^2 + \\ + (v_1w_2)^2 - 2(v_1v_2w_1w_2) + (v_2w_1)^2,$$

mettendo in evidenza w_1^2 , w_2^2 e w_3^2 ed il 2 otteniamo:

$$w_1^2(v_2^2 + v_3^2) + w_2^2(v_1^2 + v_3^2) + w_3^2(v_1^2 + v_2^2) + \\ -2(v_1v_2w_1w_2 + v_2v_3w_2w_3 + v_1v_3w_1w_3).$$

A quest'ultima espressione aggiungiamo e togliamo le quantità

$$v_1^2w_1^2, \quad v_2^2w_2^2 \quad \text{e} \quad v_3^2w_3^2,$$

ottenendo, dopo un'altra opportuna messa in evidenza, la quantità:

$$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - 2(v_1v_2w_1w_2 + v_2v_3w_2w_3 + v_1v_3w_1w_3) + \\ -(v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2).$$

Le prime due parentesi sono proprio i moduli al quadrato di \vec{v} e \vec{w} e, dato che

$$\text{Area}^2 = |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot \sin^2(\alpha) = |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) = |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot \cos^2(\alpha),$$

basta ora dimostrare che:

$$2(v_1v_2w_1w_2 + v_2v_3w_2w_3 + v_1v_3w_1w_3) + (v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2) = |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot \cos^2(\alpha).$$

Il secondo membro di questa uguaglianza rappresenta, comunque, il prodotto scalare, elevato al quadrato, dei vettori \vec{v} e \vec{w} , per cui esso è

$$(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle)^2 = (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2 =$$

$$= (v_1w_1)^2 + (v_2w_2)^2 + (v_3w_3)^2 + 2v_1v_2w_1w_2 + 2v_1v_3w_1w_3 + 2v_2v_3w_2w_3$$

che è proprio il primo membro dell'uguaglianza che volevamo dimostrare.

Ricapitolando:

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \text{Area parallelogramma due lati del quale sono } \vec{v} \text{ e } \vec{w}.$$

3. Superfici e vettore gradiente

Siamo ora pronti a parlare di funzioni a due variabili e delle "superfici" che esse rappresentano nello spazio.

3.1. Definizioni di superfici.

Consideriamo una funzione reale

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

di due variabili reali e, in particolare, l'insieme *grafico di f* , che, per definizione, è dato dal seguente insieme:

$$\text{Graf}(F) = \{(a, b, c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \wedge c = F(a, b)\}.$$

Osserviamo che il *grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$* descrive una *curva* nello “spazio”¹¹ e che quindi, una **curva**, in ultima analisi, non è altro che una applicazione f da un intervallo di valori reali nello spazio in questione¹².

Considerando il grafico di una funzione a due variabili, potremmo pensare che per ogni valore fissato della prima variabile, si genera una curva con l'altra variabile e quindi, facendo variare contemporaneamente entrambe le variabili, si generi una *superficie* nello spazio. Più formalmente, partendo da:

$$z = F(x, y)$$

¹¹Ad esempio nel piano \mathbb{R}^2 o nello spazio (nel senso ristretto della parola) \mathbb{R}^3 .

¹²In effetti ci sono delle sottigliezze che dovrebbero essere tenute in considerazione, tipo il fatto che funzioni uguali, definite su insiemi diversi, potrebbero generare “curve” uguali o funzioni diverse, su intervalli uguali, potrebbero fornire le stesse curve.. ad esempio

$$f_1 : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (\cos(2x), \sin(2x))$$

e

$$f_2 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (\cos(2x), \sin(2x))$$

descrivono la stessa circonferenza, così come

$$f_3 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (\cos(x), \sin(x)),$$

pur essendo tre funzioni “formalmente” diverse! Cogliamo l'occasione per ricordare che la definizione di funzione non è solo di *legge associativa che ad ogni elemento di un insieme fa corrispondere un unico elemento di un altro insieme*, ma include anche l'insieme di partenza e quello di “arrivo”: in definitiva sarebbe a dire che una funzione è una *tripletta*

$$(f, A, B)$$

dove f rappresenta una legge associativa, A l'insieme in cui si prendono gli elementi a cui la legge si applica e B indica l'insieme degli elementi associati (o associabili); questa definizione non è dettata da arida pignoleria, basti pensare che la stessa legge f “fare il doppio” di un numero, risulta avere caratteristiche diverse a seconda di cosa è A o B . In particolare, se $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$ allora f è *iniettiva* ma non *suriettiva*; se scegliamo $B = \{\text{Numeri pari}\}$ allora f è anche *suriettiva* e quindi *biiettiva*..

e dal $\text{Graf}(F)$ definito da:

$$\text{Graf}(F) = \{(x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

consideriamo la funzione di sezionamento $F_a(y)$ del $\text{Graf}(F)$, mediante piani perpendicolari all'asse delle x :

$$\begin{aligned} F_a(y) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto F(a, y) \end{aligned}$$

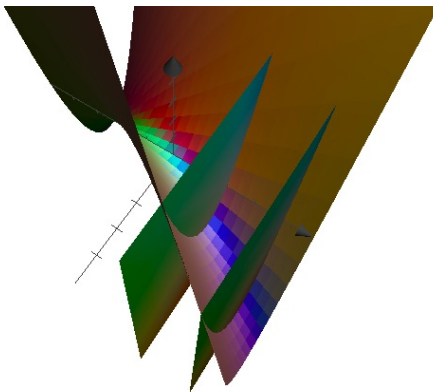
per ogni valore a fissato della variabile x . In tal modo si generano, in corrispondenza di ciascuno dei valori della x , una curva nel piano $x = a$ del tipo $z = F(a, y)$ ovvero

$$z = F_a(y).$$

L'insieme di tutte queste curve, al variare dei valori della x , formano una superficie nello spazio: infatti, il grafico della funzione F può anche essere visto come l'insieme dei punti:

$$\{(a, y, F_a(y)) \mid a \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Osserva la figura seguente, in cui i piani $x = 2$ e $x = 4$ sono stati tracciati e su di essi sono disegnate le due curve ¹³ che messe assieme alle altre formano tutta la superficie rappresentata nel grafico.



Generalmente, tutto questo discorso viene sottinteso e si dice, molto semplicemente, che una funzione di due variabili $F(x, y)$ genera una superficie \mathcal{S} nello spazio, la cui equazione (esplicita) è:

$$z = F(x, y).$$

Ora, il discorso può essere reso ancora più generico: se si considera che la relazione $z = F(x, y)$ può essere riscritta nella forma:

$$z - F(x, y) = 0,$$

¹³Sono quelle che escono dall'intersezione con il grafico della superficie

trattando quest'ultima come una *relazione* che lega le coordinate (x, y, z) dei punti dello spazio, appartenenti alla superficie \mathcal{S} , possiamo anche dire che la superficie \mathcal{S} è definita dall'equazione (implicita):

$$G(x, y, z) = 0,$$

essendo $G(x, y, z) = z - F(x, y)$ ¹⁴.

La *rappresentazione implicita* di una superficie ¹⁵, è più "potente" rispetto alla *rappresentazione esplicita* ¹⁶: non fosse altro per il fatto che, da quest'ultima si può passare anche ad una forma implicita, mentre esistono superfici, anche di tipo piuttosto comune che, facilmente rappresentate in forma implicita, non possono essere rappresentate con una unica equazione in forma esplicita!

Si consideri, ad esempio, la sfera di raggio unitario, che ha equazione ¹⁷ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ovvero, scritta in forma implicita

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad G(x, y, z) = 0.$$

Essa non ammette una equazione esplicita, che la possa rappresentare "globalmente" ¹⁸.

C'è un terzo modo, molto semplice, potente e perfino ancora più generale, per rappresentare una superficie, che è quello *parametrico*. Partendo dalla considerazione che una superficie è un *ente bidimensionale* ¹⁹, ovvero

¹⁴Qualora la superficie si possa ottenere anche da una equazione esplicita ma, come dimostra l'esempio successivo, la "rappresentazione implicita" è più generale e, pertanto, più "potente".

¹⁵Ovvero quella che si ottiene tramite una equazione implicita.

¹⁶Ovvero quella che si ottiene da una equazione del tipo $z = F(x, y)$.

¹⁷Questo si può vedere imponendo che un vettore \vec{v} generico di "coordinate" (x, y, z) abbia sempre lunghezza uno.

¹⁸Si devono considerare necessariamente e contemporaneamente le due equazioni:

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

che rappresentano i due emisferi, uno sopra e l'altro sotto il piano $\langle x/y \rangle$; nei fatti, dato che la legge associativa che definisce una funzione, per definizione, è univoca, con una sola funzione non si può certamente rappresentare due punti che stanno su una stessa retta perpendicolare al piano testé menzionato.

¹⁹E non tridimensionale come generalmente si crede da chi non ha nozioni di Matematica!

che servono due parametri per descriverla ²⁰, allora possiamo pensare che una applicazione:

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

descrive una superficie nello spazio, al variare di (s, t) nel piano ²¹: se la superficie si può descrivere anche esplicitamente, allora basta scegliere s e t come x e y e si ottiene la rappresentazione di

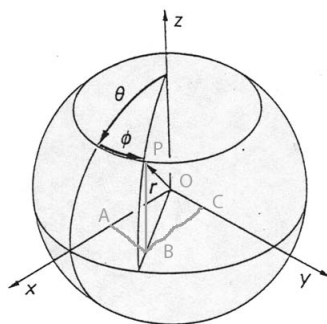
$$z = F(x, y)$$

nella forma

$$S : (s, t) \mapsto (s, t, F(s, t)).$$

Nel caso di una rappresentazione implicita, una rappresentazione parametrica si può trovare utilizzando, di volta in volta, particolari trucchi ²².

Ad esempio, la sfera data implicitamente da $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ può essere parametrizzata utilizzando le *coordinate sferiche* ²³, facendo riferimento alla figura seguente si ottiene, ricordando che il raggio è unitario:



$$\overline{OB} = r \cdot \cos(90 - \theta) = \sin(\theta), \text{ per cui}$$

$$\overline{AO} = \overline{OB} \cdot \cos(\Phi) = \sin(\theta) \cos(\Phi)$$

²⁰Avevamo già descritto il piano come ente bidimensionale, dato che viene generato da due vettori linearmente indipendenti: ed in effetti il piano è un tipo molto semplice di superficie.

²¹E' un discorso analogo alla rappresentazione parametrica di una curva: si considera una applicazione $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o anche \mathbb{R}^3 tale che $s \mapsto (x(s), y(s), \text{eventualmente } z(s))$.

²²Nota che la parametrizzazione di una superficie non è univoca, quindi non possiamo definire un metodo generale che ce la fornisca sempre su un piatto d'argento! certe volte, bisogna anche lavorarci su duro.

²³L'equivalente delle coordinate polari nel piano.

e

$$\overline{AB} = \overline{OB} \cdot \sin(\Phi) = \sin(\theta) \sin(\Phi).$$

Inoltre

$$\overline{BP} = r \cdot \sin(90 - \theta) = \cos(\theta).$$

Dato che le coordinate del punto generico sulla sfera sono proprio

$$P = (\overline{AO}, \overline{AB}, \overline{BP})$$

allora abbiamo trovato la parametrizzazione della sfera:

$$S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \Phi) \mapsto (\sin(\theta) \cos(\Phi), \sin(\theta) \sin(\Phi), \cos(\theta)).$$

Ci sentiremo liberi di utilizzare -a seconda della comodità- una delle tre rappresentazioni delle superfici, per la rimanente parte del testo.

3.2. Derivazione lungo varie direzioni, derivate parziali e vettore gradiente. Finora abbiamo considerato le superfici semplicemente come applicazioni da un sottoinsieme del piano ad un sottoinsieme dello spazio (\mathbb{R}^3), senza mettere in gioco caratteristiche di continuità o differenziabilità. Chiaramente, per effettuare uno studio efficace delle superfici, questo non basta. In genere si suppone che l'applicazione F (la S o la G , a seconda dei casi) sia continua e differenziabile con continuità fino ad un certo ordine, in modo da poter effettuare un "calcolo" differenziale anche per le superfici.

Il significato di continuità è sempre lo stesso, ovvero che, avvicinandoci ad un "punto", il valore della funzione "si avvicina" al valore della funzione nel punto:

$$\lim_{X \rightarrow P} F(X) = F(P)$$

dove X e P indicano "punti" nello spazio in cui "vive" la funzione.

In particolare, se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora $X = (x_1, x_2)$ e $P = (P_1, P_2)$, mentre $F(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$. Si può far vedere che la continuità di F significa la continuità delle tre funzioni che ne compongono l'immagine, ovvero delle f_i , con $i = 1, 2, 3$. Si osservi come il linguaggio vettoriale sia idoneo ed opportuno nel trattare le superfici: nei fatti X e P non sono altro che due vettori e la stessa funzione si può vedere come applicazione tra uno spazio vettoriale bidimensionale ad uno tridimensionale. Nel proseguo faremo pesante uso delle nozioni di calcolo vettoriale date nella prima sezione di questo capitolo.

Ricordiamo ora che per le funzioni reali di una variabile reale, la derivata è definita come il limite del rapporto incrementale per l'incremento, della variabile indipendente, tendente a zero, ovvero come

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Visto che gli incrementi potevano essere fatti *solo lungo una direzione*, quella dell'asse reale della variabile x , non aveva senso precisare in che modo si prendessero gli incrementi. Per le funzioni di più variabili, in particolari per quelle di due variabili reali ²⁴, il discorso è ben diverso, dato che le possibilità di incrementare un valore del punto P sono molteplici: c'è tutto un "cerchio" di direzioni lungo cui effettuare gli incrementi! una per ogni pendenza possibile delle rette che possiamo tracciare in un piano! Allora la definizione di derivata di una funzione a più variabile, ha un molteplicità di interpretazioni: non esiste quindi una derivata, bensì una infinità di derivate, dipendentemente da quale direzione si scelga per effettuare l'incremento della variabile indipendente. Si parlerà, pertanto, di *derivata direzionale*. Procediamo alle definizioni in modo più preciso.

Sia \vec{v} un vettore (nel piano), lungo la cui direzione si effettui un incremento (infinitesimo) $H = (\xi, \eta)$ partendo dal punto P del piano. Sia F una funzione definita sui punti del piano. La derivata di F nel punto P , nella direzione di \vec{v} , è definita come

$$F'_{\vec{v}}(P) = \lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{F(P+H) - F(P)}{|H|},$$

laddove $|H|$ indica, al solito, la lunghezza del vettore H . Osserva che se $\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ indica il versore del vettore \vec{v} allora $H = |H|\hat{v}_1 + |H|\hat{v}_2$ e $|H| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Di particolare importanza assumono le derivate direzionali nella direzione indicata dai versori degli assi coordinati, ovvero le derivate lungo le direzioni dell'asse x o dell'asse y : dato il particolare rilievo che esse assumono, anche in virtù del fatto che tramite queste due derivate si possono calcolare facilmente anche tutte le altre derivate direzionali, esse assumono il nome di *derivate parziali*. Tra le altre cose, le indicheremo anche in modo "diverso", per la precisione, se $P = (x, y)$, la derivata parziale lungo l'asse x si indica con

$$\frac{\partial F((x, y))}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F((x+h, y)) - F((x, y))}{h}$$

²⁴Che definiscono esplicitamente una superficie in \mathbb{R}^3 .

dato che l'incremento è del tipo $H = (h, 0)$ e $|H| = h$, mentre la derivata parziale lungo la direzione dell'asse y è

$$\frac{\partial F((x, y))}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F((x, y + k)) - F((x, y))}{k}.$$

Esse si indicano più brevemente anche con

$$\partial_x F(x, y) \quad \text{e} \quad \partial_y F(x, y)$$

o anche con

$$F_x(x, y) \quad \text{e} \quad F_y(x, y).$$

Convieni considerare le due derivate parziali come le componenti di un vettore, la cui importanza è fondamentale per lo studio che vogliamo intraprendere sulle superfici (e per i prossimi capitoli).

Definiamo quindi il **vettore gradiente** come:

$$\vec{\nabla} F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x F(x, y) \\ \partial_y F(x, y) \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che le derivate parziali si effettuano, normalmente, considerando l'altra variabile come una costante, mentre si deriva rispetto ad una delle due variabili, ad esempio, se $F(x, y) = 2xy + x^3 - 4y^2$ allora

$$\partial_x F = 2y + 3x^2, \quad \text{e} \quad \partial_y F = 2x - 8y.$$

Ritorniamo ora al calcolo delle derivate direzionali lungo una direzione qualsiasi definita dal vettore \vec{v} . Indichiamo con t il modulo del vettore H e con (x, y) il punto (generico) P . Allora si ha anche $\xi = t \cdot \hat{v}_1$ e $\eta = t \cdot \hat{v}_2$. Scrivendo per esteso la definizione data prima otteniamo:

$$\begin{aligned} F'_{\vec{v}}(P) &= \lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{F(P + H) - F(P)}{|H|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + \xi, y + \eta) - F(x, y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t\hat{v}_1, y + t\hat{v}_2) - F(x, y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t\hat{v}_1, y + t\hat{v}_2) - F(x + t\hat{v}_1, y) + F(x + t\hat{v}_1, y) - F(x, y)}{t} = \\ &= \text{per il teorema di Lagrange} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\hat{v}_2 F_y(x + t\hat{v}_1, \bar{y}) + t\hat{v}_1 F_x(\bar{x}, y)}{t} = \\ &= \hat{v}_2 \partial_y F(x, y) + \hat{v}_1 \partial_x F(x, y) = \langle \vec{\nabla} F(x, y), \hat{v} \rangle \end{aligned}$$

essendo \bar{x} e \bar{y} due valori compresi, rispettivamente, tra x e $x + t\hat{v}_1$ e tra y e $y + t\hat{v}_2$.

Per esempio, si voglia calcolare la derivata direzionale della funzione di prima, $F(x, y) = 2xy + x^3 - 4y^2$, nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$,

ovvero nella direzione della bisettrice $y = x$ del piano $\langle x/y \rangle$. Il vettore gradiente l'abbiamo già calcolato (nelle sue componenti) ed è:

$$\vec{\nabla}F = \begin{pmatrix} 2y + 3x^2 \\ 2x - 8y \end{pmatrix}.$$

Il versore di direzione è:

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui:

$$F_{\hat{v}}(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} 2y + 3x^2 \\ 2x - 8y \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{2}y + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y$$

ovvero:

$$\partial_{\hat{v}}F(x, y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y.$$

3.3. Piani tangenti e direzione normale alla superficie. Consideriamo ora una funzione $z = F(x, y)$, che determina la superficie \mathcal{S} nello spazio \mathbb{R}^3 . Sia P il punto di coordinate $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ e spostiamoci in un punto Q a seguito di un incremento infinitesimo h nella direzione dell'asse delle x . Quindi Q ha coordinate $(x_0 + h, y_0, F(x_0 + h, y_0))$. Il vettore che descrive tale spostamento, nello spazio, è dato da $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ e quindi esso è dato da

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Mettendo tale vettore a rapporto con l'incremento h , si determina la pendenza della retta passante per P e Q . Al solito, facendo il limite del rapporto incrementale per l'incremento tendente a zero, si ottiene **la pendenza della retta tangente nel punto P_0 alla curva $z = F(x, y_0)$** ²⁵. Si ha quindi che la direzione della retta tangente è data dal vettore:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h, 0, F(x_0 + h, y_0)) - F(x_0, y_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{h}, \frac{0}{h}, \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \right) = (1, 0, \partial_x F(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Idem si può fare incrementando solo lungo l'asse delle y , mantenendo la x costantemente su un valore prefissato, ottenendo che la pendenza di una retta tangente nel punto P , alla curva di equazione $z = F(x_0, y)$ ²⁶, è data

²⁵Del piano $\langle x/z \rangle$.

²⁶Nel piano $\langle y/z \rangle$.

dalla direzione del vettore $(0, 1, \partial_y F(x_0, y_0))$.

Per cui possiamo dire che i vettori

$$(1, 0, F_x(x, y)) \quad \text{e} \quad (0, 1, F_y(x, y))$$

esprimono, punto per punto, due direzioni tangenti alla superficie: in pratica stiamo tagliando la superficie con piani perpendicolari al piano $\langle x/y \rangle$ ed ad uno degli assi coordinati, così generando delle curve nei piani $\langle x/z \rangle$ o $\langle y/z \rangle$; di queste curve (che appartengono alla superficie) si vanno a calcolare i vettori tangenti nel punto. Chiaramente tali vettori (almeno nel nostro caso, in cui consideriamo superfici regolari) risultano essere non-paralleli, ovvero linearmente indipendenti e, pertanto, essi generano tutto il piano di vettori tangenti alla superficie in un punto. Questo è facile da capire, dato che scegliendo le direzioni “privilegiate” degli assi coordinati x e y , a partire da combinazioni lineari di esse, si ottengono anche tutte le altre direzioni che si vogliono trovare.

In definitiva possiamo dire che, il piano tangente π_{tg} nel punto P_0 della superficie, di coordinate $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, è dato dal piano generato dai due vettori testé descritti, fatto passare per il punto P_0 , ovvero:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ F_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ F_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

o, se si preferisce,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \mu \\ z = z_0 + \lambda F_x(x_0, y_0) + \mu F_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

da cui

$$\lambda = x - x_0 \quad \wedge \quad \mu = y - y_0,$$

ed infine

$$(1) \quad \boxed{z = z_0 + \langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle}.$$

C'è da notare che la stessa equazione si può scrivere in forma più compatta (ed utile) in tal guisa: partendo da (1) riscriviamo

$$F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

e ponendo

$$G(x, y, z) := F(x, y) - z$$

(ovvero passando alla forma implicita della superficie!), si ha:

$$\vec{\nabla}G(x_0, y_0, z_0) = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0), -1)$$

e quindi il piano tangente si riscrive (più compattamente) come:

$$\pi_{tg} : \langle \vec{\nabla}G(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

3.4. Caratteristica fondamentale del vettore gradiente. In questo paragrafo dimostriamo che il vettore gradiente risulta essere perpendicolare alla superficie in un suo punto (ove, per definizione, perpendicolare è da intendersi al piano tangente alla superficie). In effetti, l'ultima forma data per l'equazione del piano tangente esprime proprio questo.. d'altra parte, se si parte dalla considerazione che il vettore gradiente è perpendicolare alla superficie, allora il piano tangente si può trovare -semplicemente- imponendo la condizione di perpendicolarità ²⁷ tra il vettore gradiente ed un vettore (generico) "applicato" nel punto dato ²⁸.

Consideriamo la forma implicita della superficie (la più generica):

$$\mathcal{S} : G(x, y, z) = 0.$$

Se consideriamo la terna (x, y, z) variabile in funzione di un parametro che chiameremo t , allora l'insieme dei punti

$$G(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

rappresenta una curva sulla superficie \mathcal{S} . Derivando rispetto a t , (ambo i membri) utilizzando la "regola della catena", si ottiene:

$$\frac{d}{dt}G(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

o, più compattamente, ponendo

$$\vec{v} := \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ \langle \vec{\nabla}G, \vec{v} \rangle = 0,$$

ovvero

$$\vec{\nabla}G \perp \vec{v}$$

e dato che \vec{v} è proprio il vettore tangente alla curva data (generica), segue l'affermazione per cui il gradiente è perpendicolare alla superficie.

²⁷Prodotto scalare uguale a zero

²⁸In effetti $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è proprio un vettore generico applicato nel punto P_0 .

D'altra parte, se facciamo direttamente il prodotto vettoriale tra i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x F \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y F \end{pmatrix},$$

che generano il piano tangente, otteniamo :

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \partial_x F \\ 0 & 1 & \partial_y F \end{vmatrix} = (-\partial_x F, -\partial_y F, 1) = -\vec{\nabla} G,$$

che conferma ancora una volta come il vettore perpendicolare al piano tangente sia proprio il gradiente della funzione $G(x, y, z)$ ²⁹.

Prima di finire il capitolo, diamo qualche esempio di calcolo.

Esempio: Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera di raggio unitario, nel punto P di coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Soluzione: L'equazione della sfera di raggio unitario è

$$G(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Il vettore gradiente di questa funzione è

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Il suo valore nel punto P è

$$\vec{\nabla} G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

²⁹In geometria (differenziale) assume enorme importanza il versore del gradiente di G , che assume il nome di *vettore normale* alla superficie (e si indica con \vec{n}). Tramite esso -ad esempio- si definisce il concetto di *orientabilità* di una superficie: si dice che una superficie è orientabile se spostando il vettore normale lungo direzioni qualsiasi, quando ritorna ad occupare il punto di partenza, esso mantiene lo stesso verso di quando era partito. Il fatto che una superficie sia orientabile significa, in parole povere, che per essa si può distinguere un "dentro" ed un "fuori", ovvero una parte "interna" ed una "esterna". Una sfera, ad esempio, è una superficie orientabile; tra le più famose superfici non orientabili si ricorda il *nastro di Möbius*, ottenuto incollando gli estremi di una striscia di carta, dopo una semi torsione di uno di essi. Sebbene l'argomento sia molto interessante, ci porterebbe lontano da quanto vogliamo principalmente trattare, per cui invitiamo il lettore interessato ad approfondire il discorso consultando uno dei testi in bibliografia.

Un vettore generico applicato nel punto P ha componenti

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \\ z - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi il piano tangente si ottiene tramite l'equazione:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \\ z - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

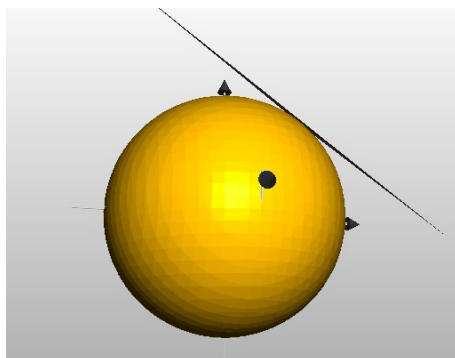
da cui

$$x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + \sqrt{2}z - 1 = 0$$

ovvero, riordinando

$$x + y + \sqrt{2}z = 2.$$

Il seguente grafico ci conforta e conferma i nostri calcoli.



CAPITOLO 4

Ottimizzazione di funzioni a più variabili

Ricordiamo che, in modo molto generale, un punto P è detto di massimo o minimo per la funzione F se localmente in P la funzione assume rispettivamente il valore più alto o più basso: vale a dire che esiste un intorno del punto P tale per cui $F(P) \geq F(\bar{X})$ ovvero $F(P) \leq F(\bar{X})$ per \bar{X} in tale intorno. Questo vale sia per le funzioni di una variabile reale, sia per funzioni a più variabili, purché sia possibile definire l'intorno del punto P e sia possibile comparare con una relazione di ordinamento i valori assunti dalla funzione. Ora restringeremo la nostra attenzione al caso di funzioni di due variabili reali a valori reali, in pratica a:

$$z = F(x, y)$$

che, come già abbiamo visto nel precedente capitolo, definisce una superficie nello spazio \mathbb{R}^3 . Intuitivamente possiamo dire che vogliamo studiare un metodo per determinare dove una superficie raggiunge -localmente- un punto “apicale” o “basale” e determinare anche i punti in cui, a seguito di un lieve scostamento, si potrebbe “cadere” o “prendere una salita”. Quanto diremo, comunque, è applicabile -con una ovvia e quanto mai semplice generalizzazione- anche al caso di funzioni reali di più (di due) variabili reali. Osserviamo fin da ora che il discorso è simile a quello fatto per le funzioni di una variabile reale: questo non deve stupire, dato che nel linguaggio vettoriale, la sostituzione di una variabile con un vettore di variabili consiste solo nel considerare un insieme di valori come se fossero uno solo. Comunque bisogna prestare un po' d'attenzione per quanto riguarda la derivabilità delle funzioni: in particolare, il fatto di poter determinare le derivate parziali non assicura che la superficie sia approssimabile tramite un piano, a meno che esse non siano pure continue. Nel caso monodimensionale questo problema non sussisteva, dato che la derivata si poteva calcolare solo lungo una direzione e quindi, essere derivabile significava, ipso facto, essere differenziabile.

1. Differenziabilità e questioni di approssimazioni

Data una funzione $z = F(x, y)$, essa si dice *differenziabile* nel punto P se esiste una funzione lineare $L = L(x, y)$ tale per cui il valore della

funzione in un punto Q nell'intorno di P si può approssimare tramite essa, a meno di ordini superiori all'incremento $Q - P$: ovvero se

$$F(Q) = F(P) + L(P) \cdot (Q - P) + \epsilon,$$

con ϵ tendente a zero più velocemente di $Q - P$.

Dato che la nozione è di tipo locale, possiamo supporre che il punto Q si ottiene da P sommando a quest'ultimo una quantità "piccola" H e quindi

$$Q = P + H;$$

inoltre, ricavando il "resto" ϵ dall'equazione che definisce la funzione L , possiamo scrivere

$$\epsilon = F(P + H) - F(P) - L(P) \cdot H$$

e dire che questo "corre" a zero più velocemente dell'incremento H significa che

$$\boxed{\lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{F(P + H) - F(P) - L(P) \cdot H}{|H|} = 0.}$$

Tenendo in considerazione le definizioni date nel capitolo precedente, ci accorgiamo che la scrittura è simile a quella che definisce le derivate direzionali della funzione F . In effetti, se vale il limite nel riquadro, allora possiamo anche dire che

$$\lim_{|H| \rightarrow 0} L(P) \cdot \frac{H}{|H|} = \lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{F(P + H) - F(P)}{|H|}$$

e quindi, dato che l'incremento H è anche uguale a $|H| \cdot \hat{H}$ ¹, indicando \hat{H} con il versore di componenti infinitesime (dx, dy) ,² si ha anche:

$$L(P) \cdot \hat{H} = \langle \vec{\nabla} F(P), \hat{H} \rangle = \partial_x F(P) dx + \partial_y F(P) dy,$$

da cui

$$L(P) = \vec{\nabla} F(x, y)|_P.$$

La quantità $L(P) \cdot H$ si chiama **differenziale della funzione nel punto P** . Abbiamo appena dimostrato che se si riesce a calcolare la derivata direzionale lungo la direzione di un incremento arbitrario, allora questa derivata direzionale rappresenta proprio il differenziale della funzione: in ultima analisi, per determinare il differenziale di una funzione a due variabili in un dato punto, è necessario poter calcolare il *gradiente della funzione* in quel

¹Il modulo del vettore per il suo versore.. e questo è infinitesimo, dato che $|H| \rightarrow 0$.

²Osserviamo che il vettore $\frac{H}{|H|}$ è un versore, avendo chiaramente lunghezza unitaria per ogni tipo di scelta del vettore H .

punto. Purtroppo questo non è sufficiente: ad esempio si può determinare il gradiente per la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

anche nell'origine del sistema di coordinate (in cui, comunque, le derivate parziali non risultano continue!) ma non si riesce a trovare nessun differenziale per tale funzione in $(0, 0)$. Si può dimostrare che la continuità delle derivate prime nel punto, implicano anche la sufficienza della condizione di differenziabilità, ovvero che basta l'esistenza di un gradiente continuo acciocché il differenziale sia determinato come prima ³.

Chiamiamo un punto per cui il differenziale può essere calcolato, *punto regolare* della superficie. Osserviamo che la regolarità del punto di una superficie significa, in ultima analisi, che in un intorno sufficientemente piccolo di quel punto, la superficie può essere approssimata bene tramite il suo piano tangente: è l'analogo di quanto avveniva per il differenziale delle funzioni ad una variabile ed il fatto che si potessero approssimare gli incrementi sostituendo le funzioni con le rette tangenti nei punti di derivabilità. Infatti dalla definizione di differenziale, indicando con Q il generico punto (x, y) nell'intorno di $P = (x_0, y_0)$, segue che:

$$F(Q) = F(P) + L(P) \cdot (Q - P) + \epsilon$$

ovvero

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \epsilon$$

e trascurando l'errore, si ottiene l'approssimazione

$$F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + \langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

od anche

$$z \approx z_0 + \langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

che, se fosse un'uguaglianza, sarebbe proprio l'equazione del piano tangente ⁴ alla superficie nel punto P .

Infine osserviamo che $z - z_0$ rappresenta l'incremento della funzione $F(x, y)$ ("partendo" dal punto P), mentre $\langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$ rappresenta il differenziale della funzione calcolato nel punto P , per cui possiamo scrivere -ancora una volta-

$$\boxed{\Delta F \approx dF}$$

³Andando al di là dei fini del presente trattato, non lo dimostreremo.

⁴Vedere l'equazione (1) del capitolo precedente.

avendo indicato con dF il differenziale della funzione e con ΔF l'incremento.

2. Ottimizzazione di funzioni a più variabili

Consideriamo -come al solito- una funzione $z = F(x, y)$ e cerchiamone il punto di massimo o minimo relativo tra i punti regolari ⁵. Se “blocchiamo” la variabile y ad essere il valore b e se nel punto (a, b) la funzione ha un punto di massimo o minimo, allora sappiamo che la funzione *di una sola variabile reale* $z = F(x, b)$ deve avere la derivata prima nulla per $x = a$. Da questa semplice osservazione ricaviamo che una condizione necessaria a ch  la funzione $z = F(x, y)$ abbia un massimo od un minimo nel punto (a, b)   che

$$\partial_x F(a, b) = 0.$$

D'altra parte lo stesso discorso si potrebbe fare per la funzione reale di una variabile reale $z = F(a, y)$, avendo fissato $x = a$ e permettendo solo a y di variare. Allora concludiamo che dovr  anche essere

$$\partial_y F(a, b) = 0.$$

L'annullarsi contemporaneo delle derivate prime   quindi la condizione necessaria affin  un punto possa essere di massimo o minimo locale: questo equivale anche a dire che necessariamente il gradiente $\vec{\nabla}F = (0, 0)$ nei punti “estremanti”. Continueremo a chiamare *critici* quei punti che annullano il gradiente della funzione:   tra essi che andremo a cercare gli estremi “regolari” della funzione.

D'altra parte, se la funzione $F(x, y)$ ha un estremo nel punto (a, b) , ponendo $x_1 = a + t \cdot h$ e $y_1 = b + t \cdot k$, allora la funzione $f(t) = F(a + t \cdot h, b + t \cdot k)$ avr  un estremo nel punto $t = 0$. Questo significa che deve essere $f'(0) = 0$ ovvero, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, per la quale risulta:

$$f'(t) = \partial_{x_1} F(x_1, y_1) \cdot h + \partial_{y_1} F(x_1, y_1) \cdot k$$

si ottiene:

$$f'(0) = \partial_a F(a, b) \cdot h + \partial_b F(a, b) \cdot k = 0$$

per qualsiasi valore degli incrementi h e k : questo pu  essere vero solo se entrambi i coefficienti $\partial_a F(a, b)$ e $\partial_b F(a, b)$ si annullano. Questo era un risultato che avevamo gi  ottenuto: per  ora ricordiamoci -per come abbiamo visto nel volume 2 di questa opera- che in un punto di massimo, la

⁵La discussione per i punti singolari si fa a parte ed esula dai nostri obiettivi attuali.

derivata seconda, di una funzione d'una variabile reale, assume segno negativo, mentre in un punto di minimo relativo, essa assume segno positivo.

Calcoliamo quindi la derivata seconda della funzione $f(t)$.

Essa è uguale a ⁶ :

$$f''(t) = \partial_{x_1 x_1}^2 F(x_1, y_1) \cdot h^2 + 2 \cdot \partial_{x_1 y_1}^2 F(x_1, y_1) \cdot h \cdot k + \partial_{y_1 y_1}^2 F(x_1, y_1) \cdot k^2$$

ovvero si determina come lo sviluppo *formale* della potenza del binomio:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F(x, y).$$

Quindi dovremo studiare il segno dell'espressione:

$$f''(0) = F''_{aa}(a, b) \cdot h^2 + 2 F''_{ab}(a, b) \cdot h k + F''_{bb}(a, b) \cdot k^2.$$

Quest'ultima espressione viene, di solito, chiamata *forma quadratica*. La teoria delle forme quadratiche è abbastanza interessante, ma prenderebbe troppo spazio da riportarla in questo capitolo. Ci accontenteremo, quindi, di accennarne alle parti essenziali.

2.1. Forme quadratiche. Le forme quadratiche si distinguono in tre tipi fondamentali:

- I. Forme *definite*: quelle che per qualsiasi valore delle variabili assumono sempre uno stesso segno (o positivo o negativo).
- II. Forme *semi-definite*: che mantengono sempre lo stesso segno a meno che non si annullino per qualche valore delle variabili.
- III. Forme *indefinite*: quando l'espressione che le rappresenta può assumere sia valori positivi che valori negativi a seconda della scelta delle variabili.

Ritornando al problema che ci interessa, di determinare i punti estremanti per la funzione $F(x, y)$, siamo quindi, interessati alla determinazione di un metodo che ci permetta di stabilire quando la forma quadratica definita da $f''(0)$ sia definita positiva o definita negativa.

Chiaramente, se una quantità è del tipo $A \cdot h^2$ il suo segno dipenderà unicamente dal segno della quantità A . Premessa questa semplice osservazione, consideriamo una espressione del tipo:

$$\Phi = A \cdot h^2 + 2B \cdot h k + C \cdot k^2.$$

⁶Osserva che da ogni derivata parziale prima discendono due derivate parziali seconde: il Teorema di Schwarz ci assicura che le derivate parziali "miste" $\partial_{xy} F$ e $\partial_{yx} F$ sono uguali se esse sono funzioni continue.

Se questa Φ è definita positiva, per $k = 0$ ed $h \neq 0$ si ottiene $\Phi = A \cdot h^2$ e quindi la quantità rappresentata da A deve essere positiva. D'altra parte possiamo, mediante semplici passaggi algebrici, scrivere"

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{A} (A^2 h^2 + 2AB \cdot h k + AC \cdot k^2) = \\ &= \frac{1}{A} ((Ah + Bk)^2 - B^2 \cdot k^2 + AC \cdot k^2) = \\ &= \frac{1}{A} ((Ah + Bk)^2 + (AC - B^2) \cdot k^2).\end{aligned}$$

Ora, tra i vari valori che h e k possono assumere, ci saranno anche quelli per cui $A \cdot h + B \cdot k = 0$ e quindi si otterrebbe

$$\Phi = \frac{1}{A} (AC - B^2) \cdot k^2.$$

Per continuare ad essere definita positiva, dovrà quindi essere anche

$$(AC - B^2) > 0.$$

Ricapitolando, affinché la forma Φ sia definita positiva è necessario che A e $(AC - B^2)$ siano entrambe quantità positive.

In effetti queste due condizioni sono anche sufficienti a che la forma Φ sia definita positiva, infatti se $k \neq 0$ e $(AC - B^2) > 0$ allora $(AC - B^2) \cdot k^2 > 0$, ma, d'altra parte, l'altra parentesi dell'espressione di Φ è elevata al quadrato, quindi è di suo sempre non-negativa e, supponendo anche $A > 0$, risulta che tutta Φ è sempre positiva.

2.2. Determinazione di massimi o minimi. Per quanto abbiamo detto nella sezione precedente, la determinazione della positività della forma

$$A h^2 + 2B h k + C k^2$$

è equivalente alla richiesta della positività di A e $AC - B^2$.

Nel caso di $f''(0)$ abbiamo altresì:

$$A = F''_{aa}, \quad B = F''_{ab}, \quad C = F''_{bb}.$$

Per cui, la forma è definita positiva se la derivata seconda F''_{aa} è positiva e se lo è anche l'espressione $F''_{aa} \cdot F''_{bb} - (F''_{ab})^2$.

È comodo formare con le quattro derivate parziali della funzione $z = F(x, y)$ una matrice, detta *matrice hessiana* ed indicata come nel seguito:

$$\mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} F''_{xx}(x, y) & F''_{xy}(x, y) \\ F''_{yx}(x, y) & F''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si noterà ora che il termine A rappresenta il primo elemento di codesta matrice, mentre l'espressione $AC - B^2$ non è altro che il determinante della matrice hessiana (che chiameremo -semplicemente- l'hessiano). In definitiva, possiamo concludere che, in un punto $P = (x_P, y_P)$ di minimo relativo, la funzione $z = F(x, y)$ ha ⁷ :

PROPOSIZIONE 1. (*Test di minimalità*)

i. $\vec{\nabla}F(P) = (0, 0)$

ii. $h_{1,1}(P) > 0 \quad e \quad \det(\mathbb{H}(P)) > 0.$

Si può, inoltre, concludere, dagli stessi ragionamenti della sezione precedente, che *se l'hessiano è positivo ma il primo elemento della matrice hessiana è negativo, allora la forma è definita negativa, per cui il punto corrispondente è di massimo relativo*: ovvero in un punto $P = (x_P, y_P)$ di massimo relativo, la funzione $z = F(x, y)$ ha :

PROPOSIZIONE 2. (*Test di massimalità*)

i. $\vec{\nabla}F(P) = (0, 0)$

ii. $h_{1,1}(P) < 0 \quad e \quad \det(\mathbb{H}(P)) > 0.$

Esempio: [Demidovič, Esercizi e problemi di Analisi Matematica]. I letti di due corsi d'acqua (entro i limiti di un certo campo) rappresentano approssimativamente una parabola $y = x^2$ ed una retta $y = x - 2$. Si chiede di riunire i due corsi d'acqua con un canale rettilineo di lunghezza minima. Per quali punti bisogna farlo passare?

Soluzione: Un punto sulla parabola ha coordinate (x, x^2) mentre uno sulla retta $(y, y - 2)$. Per rendere minima la distanza tra due punti, è sufficiente minimizzare il quadrato della distanza, per cui possiamo considerare la funzione seguente:

$$F(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - y + 2)^2.$$

Passiamo alla determinazione dei punti critici, imponendo che il gradiente sia nullo:

$$\vec{\nabla}F(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - y) + 2(x^2 - y + 2) \cdot (2x) \\ 2(x - y)(-1) + 2(x^2 - y + 2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁷Indicando gli elementi della matrice hessiana, al solito, con

$$\mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} h_{1,1}(x, y) & h_{1,2}(x, y) \\ h_{2,1}(x, y) & h_{2,2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x^3 - 2xy + 5x - y = 0 \\ 2x^2 - 4y + 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

per cui anche

$$\begin{cases} 2x^3 + 5x - y(2x + 1) = 0 \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + x + 2) \end{cases} \Rightarrow 2x^3 + 5x - \frac{1}{2}(x^2 + x + 2)(2x + 1) = 0,$$

ovvero:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0.$$

Moltiplicando per due, otteniamo l'equazione:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0,$$

il primo membro della quale si scompone nel prodotto di due fattori irriducibili:

$$(x - \frac{1}{2})(2x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Infine otteniamo come soluzione $x = \frac{1}{2}$ e quindi $y = \frac{11}{8}$. Dobbiamo verificare che questa coppia di valori rende minima la distanza tra i punti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ della parabola e $(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$ della retta. Al tal fine determiniamo la matrice hessiana calcolata nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$. Le derivate seconde sono:

$$\partial_{xx}^2 F(x, y) = 2 + 4x \cdot 2x + 4(x^2 - y + 2).$$

$$\partial_{xy}^2 F(x, y) = -2 - 2 \cdot 2x.$$

$$\partial_{yy}^2 F(x, y) = 2 + 2 = 4.$$

Pertanto la matrice hessiana in $(\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$ è:

$$\mathbb{H} \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{8} \right) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} + 8\frac{1}{4} + 4(\frac{1}{4} - \frac{11}{8} + 2) & -2 - 4\frac{1}{2} \\ -2 - 4\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'hessiano vale $\frac{13}{2} \cdot 4 - (-4)^2 = 26 - 16 = 10$ ed è quindi positivo; d'altra parte anche il primo elemento della matrice hessiana lo è, per cui -effettivamente- la coppia di valori trovati corrisponde ad un minimo della funzione $F(x, y)$.

Altro esempio importante: In statistica si cerca la retta di regressione, minimizzando lo scarto quadratico tra le coppie dei numeri ottenuti empiricamente ed il valore che dovrebbe essere ottenuto se il punto fosse realmente sulla retta. Quali sono i parametri della retta che rendono minimo tale scarto?

Soluzione: Una retta ha equazione $y = mx + q$. Date le coppie di punti nel piano (x_k, y_k) con $k = 1, 2, \dots, n$ si cerca il minimo della funzione:

$$F(m, q) = \sum_{k=1}^n (y_k - (mx_k + q))^2$$

essendo questa la somma delle differenze al quadrato tra i dati ricavati empiricamente e quelli immaginati sulla retta. Il vettore gradiente è:

$$\vec{\nabla} F(m, q) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n 2(y_k - mx_k - q) \cdot (-x_k) \\ \sum_{k=1}^n 2(y_k - mx_k - q) \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

Uguagliare a zero il vettore gradiente, significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - q) \cdot (-x_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - q) \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\sum_{k=1}^n x_k^2) m + (\sum_{k=1}^n x_k) q = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ (\sum_{k=1}^n x_k) m + n q = \sum_{k=1}^n y_k \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Cramer si ottiene la soluzione:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k & (\sum_{k=1}^n x_k) \\ \sum_{k=1}^n y_k & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\sum_{k=1}^n x_k^2) & (\sum_{k=1}^n x_k) \\ (\sum_{k=1}^n x_k) & n \end{vmatrix}}; \quad q = \frac{\begin{vmatrix} (\sum_{k=1}^n x_k^2) & \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ (\sum_{k=1}^n x_k) & \sum_{k=1}^n y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\sum_{k=1}^n x_k^2) & (\sum_{k=1}^n x_k) \\ (\sum_{k=1}^n x_k) & n \end{vmatrix}}$$

ovvero, scritti per esteso:

$$m = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - (\sum_{k=1}^n x_k) (\sum_{k=1}^n y_k)}{n \cdot (\sum_{k=1}^n x_k^2) - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}$$

e

$$q = \frac{(\sum_{k=1}^n x_k^2) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k) - (\sum_{k=1}^n x_k) (\sum_{k=1}^n x_k y_k)}{n \cdot (\sum_{k=1}^n x_k^2) - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}.$$

Indicando, come generalmente è d'uso,

$$S_{xx} = \text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

la varianza osservata (essendo \bar{x} il valore medio dei valori osservati) e con

$$S_{xy} = \text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

la covarianza osservata, possiamo notare che il denominatore di m è proprio $n^2 \cdot S_{xx}$, infatti, sviluppando il quadrato del binomio di S_{xx} si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente si può dimostrare che il numeratore è $n^2 \cdot S_{xy}$, per cui si può anche scrivere che:

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

e ricavare q dall'equazione della retta ⁸, ottenendo:

$$q = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Per verificare che le quantità trovate individuano il minimo per la funzione $F(m, q)$ calcoliamo la matrice hessiana. Si ha:

$$\partial_{mm}F(m, q) = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

$$\partial_{mq}F(m, q) = 2 \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$\partial_{qq}F(m, q) = 2n,$$

per cui:

$$\mathbb{H}(m, q) = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 & 2 \sum_{k=1}^n x_k \\ 2 \sum_{k=1}^n x_k & 2n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{pmatrix}$$

Il primo termine di tale matrice è sicuramente positivo, essendo una somma di quadrati (e, tra l'altro, nemmeno dipende da m o q). L'hessiano vale il doppio della seguente espressione

$$n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2$$

⁸La retta di regressione, minimizzando lo scarto quadratico, dovrà passare la punto medio della distribuzione dei punti!

ed anche questa è una quantità sempre positiva ⁹: questo basta per applicare il test di minimalità e dire che i valori trovati sono quelli giusti.

3. Ottimizzazione vincolata e moltiplicatori di Lagrange

In molti casi reali, la funzione da ottimizzare deve rispettare anche dei vincoli imposti sulle variabili indipendenti: in questo caso il metodo dato prima per la determinazione dei punti di massimo o minimo, non può essere efficace. Si pensi, ad esempio, ad una sfera -di cui sappiamo che il “polo nord” rappresenta il punto di massimo ed il “polo sud” quello di minimo- ed imponiamo che le variabili si possano scegliere unicamente appartenenti ad un piano obliquo passante dal centro della sfera e che formi un angolo di 45 gradi sull’orizzontale ¹⁰. È chiaro a tutti che né il “polo nord”, né il “polo sud” appartiene ad un tale piano, quindi i punti che stiamo ricercando saranno altri. Ma come fare a rispondere correttamente alla domanda del problema? Il punto chiave è che, quando si dice che le variabili debbono rispettare dei vincoli, allora si introduce una funzione aggiuntiva che esprime la relazione a cui debbono soddisfare: in particolare, oltre al fatto che dobbiamo trovare gli estremi alla funzione:

$$z = F(x, y),$$

deve anche essere soddisfatta un’equazione del tipo

$$G(x, y) = 0.$$

Quest’ultima si chiama, di solito, *il vincolo* del problema. Se si riesce ad esplicitare la relazione tra le variabili x ed y , correttamente si potrebbe sostituire l’espressione che rappresenta una delle due variabili (rispetto all’altra) nella funzione di partenza ed ottenere, anziché una funzione di due variabili, una funzione di una variabile da ottimizzare: ad esempio, supponiamo che da $G(x, y) = 0$ si possa ricavare $y = g(x)$, allora invece di $z = F(x, y)$, potremmo studiare la funzione

$$z = F(x, g(x))$$

⁹Una dimostrazione la possiamo fare in questo modo: visto che si tratta di una somma finita di quantità, basta dimostrare che la quantità è positiva per la somma di soli due termini (in generale si suppone di sommare due termini di cui una è una somma di due termini, di cui una è una somma di due termini ecc.. si dice che *si procederà induttivamente per un numero maggiore di termini*). Sia quindi la quantità espressa da

$$2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2$$

che è, svolgendo i calcoli, uguale a:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

e quest’ultima, essendo il quadrato di un binomio, sarà una quantità sempre positiva (o al più nulla).

¹⁰Il piano $\langle x/y \rangle$ in particolare.

e determinare gli estremi per essa (che ingloba in sé le informazioni sul vincolo). Però a noi interessa trovare un metodo ancora più generale e che possa valere anche a dimensione superiore. Il grande matematico Lagrange fece le osservazioni giuste e risolse il problema una volta per tutte. Il suo punto di partenza è che il differenziale della funzione z deve annullarsi anche nel caso in cui si possa esprimere una variabile in funzione dell'altra. Quindi si ha, in un punto estremale:

$$dz = F_x dx + F_y dy = 0,$$

ed inoltre, differenziando il vincolo,

$$dG = G_x dx + G_y dy = 0.$$

Nota che quest'ultima equazione definisce implicitamente il differenziale di y . Se moltiplichiamo quest'ultima equazione per un parametro λ (detto **moltiplicatore di Lagrange**) e togliamo il tutto dall'equazione $dz = 0$, otteniamo

$$(F_x - \lambda G_x) dx + (F_y - \lambda G_y) dy = 0$$

e, scegliendo λ in modo che il coefficiente di dy si annulli, dovrà anche essere nullo il coefficiente di dx (in corrispondenza di un punto estremale). Quindi, una condizione necessaria che dovrà essere soddisfatta nei punti di massimo o minimo, è che siano verificate le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

¹¹. Queste due equazioni, assieme a quella del vincolo, formano un sistema di tre equazioni in tre incognite: risolvendo si trovano i punti che potrebbero essere di massimo o di minimo: ovvero i punti critici. Come ultima osservazione si noti che il gradiente della funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = F - \lambda G$$

detta **funzione di Lagrange (o Lagrangiana)** corrisponde esattamente ai primi membri delle due equazioni testé date più il vincolo: allora possiamo dire che per trovare i punti critici di una funzione F che rispettino un vincolo G , si può procedere alla ricerca dei punti critici della funzione non vincolata $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ annullando -come al solito- il gradiente di essa.

Esempio: Dato un cassetto di capacità (volume) V , quali devono essere le sue dimensioni in modo da costruirlo con la minore quantità possibile di materiale?

¹¹Osserva che queste due condizioni significano anche che, in un punto di massimo o minimo, il vettore gradiente di F è *parallelo* al vettore gradiente di G .

Soluzione: Se x , y , e z denotano lunghezza, larghezza e profondità del cassetto, allora

$$V = xyz.$$

D'altra parte si ha anche che la superficie totale è

$$S = xy + 2yz + 2xz.$$

Dobbiamo trovare quindi il minimo della funzione $S = S(x, y)$ soggetta al vincolo $xyz = V$ prefissato. Costruiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y) = xy + 2yz + 2xz - \lambda(xyz - V).$$

Il gradiente di tale funzione è

$$\vec{\nabla} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} y + 2z - \lambda yz \\ x + 2z - \lambda xz \\ 2y + 2x - \lambda xy \\ xyz - V \end{pmatrix}.$$

Uguagliando a zero il vettore gradiente, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} y + 2z - \lambda yz = 0 \\ x + 2z - \lambda xz = 0 \\ 2y + 2x - \lambda xy = 0 \\ xyz - V = 0. \end{cases}$$

Quindi si ha anche

$$\begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2y + 2x = \lambda xy \\ xyz = V. \end{cases}$$

da cui, isolando λ nelle prime tre equazioni, si ottengono le equazioni:

$$\frac{y + 2z}{yz} = \frac{x + 2z}{xz} = \frac{2y + 2x}{xy}.$$

Effettuando le divisioni si ottengono le equazioni:

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

Quindi ricaviamo che:

$$y = x \quad \text{e} \quad y = 2z.$$

Sostituendo nell'equazione del vincolo (l'ultima ancora non utilizzata del sistema), otteniamo:

$$y \cdot y \cdot \frac{1}{2}y = V$$

da cui

$$y^3 = 2V \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{2V}$$

e, quindi, anche

$$x = \sqrt[3]{2V} \quad \text{e} \quad z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Avendo il problema senso solo per la determinazione di un punto di minimo, il valore critico trovato (la tripletta dei tre valori!) rappresenterà senz'altro la soluzione del problema.

Esempio: Un giardiniere, dentro un'aiuola di forma ellittica, vuole creare un rettangolo di area massima da riempire di primule: come dovrebbe scegliere le dimensioni del rettangolo?

Soluzione: Sia l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Un punto sull'ellisse di coordinate (x, y) determina, per simmetria rispetto agli assi cartesiani, tutto il rettangolo inscritto nell'ellisse, per cui basta studiare il prodotto $x \cdot y$ per determinare l'area massima: in effetti

$$F(x, y) = x \cdot y$$

rappresenterebbe solo $\frac{1}{4}$ del rettangolo inscritto, ma -chiaramente- se un quarto del rettangolo è massimo, lo sarà anche il rettangolo tutto intero!

La lagrangiana del problema è:

$$\mathcal{L}(x, y) = xy - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Il sistema che esce ponendo il suo gradiente a zero è:

$$\begin{cases} y - \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \\ x - \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo anche:

$$\lambda = \frac{a^2 y}{2x} = \frac{b^2 x}{2y}$$

e quindi

$$(ay)^2 = (bx)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

Sostituendo nell'ultima equazione del sistema otteniamo:

$$2 \cdot \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \mp \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

e

$$2 \cdot \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \mp \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi i punti critici sono i quattro valori

$$\left(\mp \frac{a\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{b\sqrt{2}}{2} \right).$$

Per determinare quale (o quali) dei quattro punti critici è quello giusto, consideriamo il fatto che la funzione $F(x, y) = xy$ assume valore negativo per x e y di segno discorde: quindi eliminiamo le due coppie di valori con segni diversi; le altre due coppie di valori rappresentano le uniche soluzioni che ha senso trovare, dato il carattere del problema. Quindi le soluzioni sono:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2} \right)$$

e la sua simmetrica rispetto all'origine

$$\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2} \right),$$

che, comunque, rappresenta la stessa soluzione del punto precedente.

CAPITOLO 5

Approssimazione numerica delle soluzioni di una o.d.e.

Un *problema di Cauchy* è una equazione differenziale ordinaria con un numero di condizioni iniziali pari all'ordine dell'equazione stessa. La teoria delle equazioni differenziali è ben sviluppata ¹ e, oltre a indicare, quando si può, le soluzioni "analitiche", riesce anche a discutere sull'esistenza delle soluzioni e sulla "stabilità" delle stesse ² Ci dedicheremo a o.d.e. del primo ordine, che possono essere scritte nella forma:

$$y' = f(t; y(t)),$$

con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$. Per questo tipo di problema di Cauchy (P.C.), una condizione sufficiente di esistenza (locale) della soluzione è data del teorema di *Picard*, che afferma esistere ed essere unica la soluzione se f è continua in un intorno del punto iniziale (t_0, y_0) e rispetta dell'ulteriore condizione: $\exists L \geq 0 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$. Se questa condizione ulteriore non è verificata, una soluzione esiste, ma non è detto che sia unica ³. Ora, il discorso che faremo per le o.d.e. del primo ordine può essere esteso ad equazioni differenziali di ordine qualsiasi n , introducendo $n - 1$ variabili che "abbasseranno" l'ordine di derivazione, uno alla volta, generando, però, un sistema di equazioni del primo ordine; ad esempio, consideriamo:

$$y^{(n)} = f(t; y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ed introduciamo le variabili $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, per trasformare l'o.d.e. di ordine n in un sistema di n o.d.e. del primo ordine scriviamo:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t; y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

¹Ne abbiamo ampiamente parlato nel secondo volume di questa opera.

²Ovvero di quanto variano le soluzioni stesse al variare, anche di poco, le condizioni iniziali.

³Se vale la seconda condizione, si dice anche *la funzione è lipschitziana rispetto a y*.

Coroneremo lo studio degli argomenti di questo capitolo, con la simulazione del modello *preda-predatore*: uno dei grandi successi della “Matematica Applicata”, ottenuti nella prima metà del '900. Dobbiamo premettere che, dato il livello scolastico di studio ⁴ *non ci occuperemo di approfondire il discorso con questioni riguardanti la gestione dell'errore e la velocità di “convergenza” del metodo*: faremo, all'occorrenza, solo qualche considerazione per “seminare” delle idee che potranno essere, successivamente, approfondite dallo studente solerte o dallo studioso interessato.

1. Metodo di Eulero

Il metodo è piuttosto semplice ma, proprio per questo, porta a soluzioni non sempre molto affidabili. L'idea principale è che *la derivata è il limite di un rapporto incrementale* e, pertanto, se gli incrementi sono piccoli, essa può rappresentare proprio il rapporto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ora, nell'equazione:

$$y' = f(t; y(t)),$$

la funzione del secondo membro è proprio la derivata della funzione $y = y(t)$, che ne rappresenta la soluzione, ergo:

$$f(t; y(t)) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Riscriviamo questa equazione approssimata nella forma più utile:

$$\boxed{y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f(t; y(t))}.$$

Se noi ora immaginiamo di aver suddiviso l'intervallo in cui determinare la soluzione della o.d.e. in n parti uguali ⁵, tramite la ripartizione:

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n,$$

possiamo calcolare, a partire da t_0 , il valore della funzione approssimata in t_1 tramite la formula nel riquadro, Successivamente ricavare t_2 , nello stesso modo e procedere così, reiteratamente, fino all'ultimo valore $y(t_n)$, corrispondente al valore approssimato della funzione ricercata. Pertanto poniamo, scelto $h = \frac{t_n - t_0}{n}$:

$$y(t_1) = y(t_0) + h \cdot f(t_0; y(t_0)),$$

$$y(t_2) = y(t_1) + h \cdot f(t_1; y(t_1)),$$

$$\vdots$$

⁴Scuola secondaria superiore.

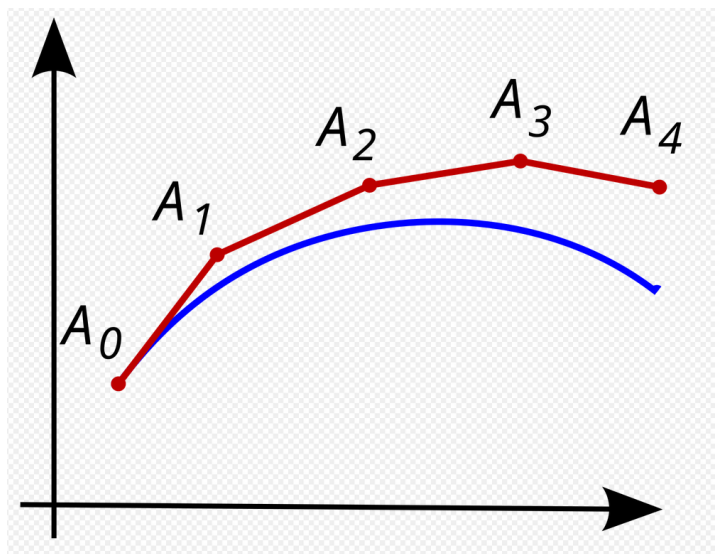
⁵Si dice che stiamo **discretizzando** il tempo.

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + h \cdot f(t_{n-1}; y(t_{n-1})).$$

Riscriviamo, per comodità, la formula ricorsiva ⁶ utilizzando la convenzione $y_k = y(t_k)$ ed indicando l'incremento $h = \frac{t_n - t_0}{n}$ direttamente con il suo valore frazionario:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{t_n - t_0}{n} \cdot f(t_k; y_k).$$

Vogliamo giusto osservare che, a livello pratico, stiamo sostituendo la funzione $y = y(t)$, su ciascun punto della partizione, con la retta tangente al grafico della funzione, presa nel punto precedente: evidentemente, per una discretizzazione fatta con pochi intervalli, la poligonale che ne esce può essere molto distante ⁷ dalla funzione reale che dovrebbe approssimare. Nella figura seguente la linea blu rappresenta la soluzione (sconosciuta) di un dato P.C.: la "spezzata" rossa rappresenta la soluzione approssimata trovata con il metodo di Eulero.



(Immagine presa dal web)

⁶In alcuni contesti, questo metodo viene detto **di Eulero esplicito**, dato che il valore successivo si calcola a partire dal valore appena trovato; però si può anche scrivere un formula ricorsiva, approssimando la derivata con il rapporto incrementale "a sinistra" ($\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$), ricavando una formula ricorsiva dove il passo successivo si ricava utilizzando un valore presente allo stesso passaggio di calcolo: in tal caso il metodo si dirà **di Eulero implicito**.

⁷Nonostante l'andamento possa essere molto simile.

Esempio: Determinare un valore approssimato della soluzione del P.C. seguente, per $t = \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} y' = t^2 + y \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Soluzione: La soluzione di questo P.C. si può trovare con la formula risolutiva per le o.d.e lineari del primo ordine ed imponendo la condizione iniziale alla soluzione

$$y(t) = k e^t - t^2 - 2t - 2.$$

Pertanto, la soluzione esatta si determina in:

$$y(1.5) = 5.93977.$$

Utilizzeremo questo risultato per confrontare quanto verrà trovato tramite il metodo di Eulero. Per procedere dovremo decidere una ripartizione dell'intervallo $[1, 1.5]$ in un certo numero di parti uguali: scegliamo, per iniziare, $n = 10$, per cui $h = \frac{1.5-1}{10} = 0.05$. Quindi avremo:

$$t_0 = 1, t_1 = 1.05, t_2 = 1.1, \dots, t_{10} = 1.5.$$

Ora calcoliamo le approssimazioni secondo quanto riportato nella "legge ricorsiva" scritta nel riquadro di prima.

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0; y_0) \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 3 + 0.05 \cdot (1^2 + 3) = 3.2$$

e continuiamo così ⁸. Osserviamo che se raddoppiamo il numero degli intervalli della partizione, l'approssimazione diventa migliore.

Nel caso $n = 10$ otteniamo $y(1.5) \approx 5.8126$, mentre per $n = 20$ si ottiene: $y(1.5) \approx 5,87489$.

h=0,05										
T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_10
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5
Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_10
3	3,2	3,4151	3,6464	3,8948	4,1616	4,4478	4,7547	5,0835	5,4357	5,8126

h= 0,025																				
T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_10	T_11	T_12	T_13	T_14	T_15	T_16	T_17	T_18	T_19	T_20
1	1,025	1,05	1,075	1,1	1,125	1,15	1,175	1,2	1,225	1,25	1,275	1,3	1,325	1,35	1,375	1,4	1,425	1,45	1,475	1,5
Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_10	Y_11	Y_12	Y_13	Y_14	Y_15	Y_16	Y_17	Y_18	Y_19	Y_20
3	3,1	3,2038	3,3114	3,4231	3,5389	3,659	3,7836	3,9127	4,0465	4,1852	4,3289	4,4777	4,6319	4,7916	4,957	5,1282	5,3054	5,4888	5,6785	5,8749

Con $n = 100$ il valore approssimato è di $y(1.5) \approx 5.9266$, non molto "distante" dal valore "vero" di 5.93977.

⁸Per praticità implementiamo le formule su un foglio di calcolo e riportiamo i calcoli nel grafico seguente.

2. Metodo di Heun

Un miglioramento del metodo di Eulero è stato indicato da Heun, che ebbe questa utile idea: dato che il problema grosso del metodo di Eulero è il fatto che la tangente viene calcolata unicamente nel punto iniziale e, tirando dritto, ci si allontana dalla curva reale e la successiva retta tangente si tratterà a partire da un punto "iniziale" che sta già di suo, possibilmente, lontano dal valore reale sul grafico della funzione soluzione, egli credette giusto fare la media aritmetica tra la pendenza della retta tangente nel punto iniziale e la pendenza della retta tangente nel punto finale "putativo" trovato tramite la prima approssimazione stessa: in pratica determina, a partire dal primo punto della partizione, un secondo valore corrispondente al secondo valore della partizione e utilizza questo secondo punto per determinare la retta tangente in esso e poi, per approssimare il tratto di curva nel primo intervallino, utilizza la retta con pendenza pari alla media aritmetica tra le pendenze delle due rette tangenti, procedendo nello stesso modo per "avanzare" con la costruzione della poligonale approssimante.

Consideriamo il primo passo del metodo di Eulero:

$$y_1 = y_0 + \frac{t_n - t_0}{n} \cdot f(t_0; y_0)$$

e determiniamo il primo punto $A_1(t_1, y_1)$. La retta tangente in questo punto avrà pendenza

$$m_{\tan_1} = f(t_1; y_1).$$

Se poniamo il coefficiente angolare della retta, sul primo intervallo $[t_0, t_1]$, uguale alla media tra questo coefficiente angolare e quello della retta tangente nel punto iniziale $A_0(t_0, y_0)$, otteniamo che questa pendenza deve essere:

$$m_0 = \frac{f(t_0; y_0) + f(t_1; y_1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (f(t_0; y_0) + f(t_1; y_0 + f(t_0; y_0))).$$

Pertanto, il primo punto approssimato sarà:

$$y_1 \approx y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f(t_0; y_0) + f(t_1; y_0 + f(t_0; y_0))).$$

Il metodo è anche un esempio di **metodo predictor-corrector**: si predice un valore (con il metodo di Eulero) e questo si utilizza per correggere una stima iniziale (si corregge la pendenza con la media delle pendenze tra quella iniziale e quella stimata finale). In generale, per ottenere ogni passo successivo, si può generalizzare la formula di prima e scrivere la seguente formula ricorsiva di Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (f(t_n; y_n) + f(t_{n+1}; y_n + f(t_n; y_n))).$$

Vediamo come funziona con un esempio e quanto meglio lavori rispetto al metodo di Eulero.

Esempio: Si voglia risolvere lo stesso P.C. considerato per illustrare in metodo di Eulero, ovvero:

$$y' = t^2 + y, \quad y(1) = 3$$

per ottenere una soluzione approssimata di $y(1.5)$.

Soluzione: Troviamo il primo valore approssimato e poi procediamo nella creazione di una tabella su foglio di calcolo: stabiliamo come numero di intervalli della partizione sempre $n = 10$, per cui $h = 0.05$. Ora poniamo $y_0 = 3$, $t_0 = 1$ e calcoliamo la prima pendenza

$$f(t_0; y_0) = t_0^2 + y_0 = 4$$

Determiniamo il valore previsto di y_1 per come insegna Eulero:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0; y_0) = 3 + 0.05 \cdot 4 = 3.2.$$

Troviamo anche la pendenza prevista sul secondo estremo t_1 , che è

$$f(t_1; y_1) = t_1^2 + y_1 = (1.05)^2 + 3.2 = 4.3025.$$

Ed ora correggiamo il valore y_1 ottenendo il valore approssimato di Heun:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f(t_0; y_0) + f(t_1; y_1)) = 3 + 0.025 \cdot (4 + 4.3025) = 3.2075625.$$

Si deve ripetere questa ricorsione per altre 9 volte...

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_10
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5
f(t_0;y_0)	f(t_1;y_1)	f(t_2;y_2)	f(t_3;y_3)	f(t_4;y_4)	f(t_5;y_5)	f(t_6;y_6)	f(t_7;y_7)	f(t_8;y_8)	f(t_9;y_9)	f(t_10;y_10)
4	4,3025	4,633066	4,977559	5,352623	5,743479	6,167652	6,609695	7,088065	7,586621	8,12480324
Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_10
EULERO con valori di HEUN	3,2	3,423066	3,655059	3,912623	4,180979	4,477652	4,787195	5,128065	5,484121	5,87480324
HEUN	3,207563	3,423389	3,663331	3,913313	4,190025	4,478757	4,797085	5,129639	5,494932	5,87690643

Si osserva che con soli 10 ricorsioni si arriva ad un valore approssimato che, per ottenerne uno uguale con il metodo di Eulero, sarebbero servite 20 iterazioni! Si può verifica che con 20 ricorsi si arriva al valore 5.90751680038685 e con 100 iterazioni a: 5.93318315448434, un valore molto vicino a quello reale di 5.93977.

3. Simulazione modello Preda-Predatore

Durante la prima guerra mondiale, come è normale che accada durante un conflitto, ci fu un "fermo-pesca" imposto per esigenze militari e quindi, i pescatori del mare Adriatico, finita la guerra, si aspettavano di rientrare in mare e pescare chissà quanto pesce. Purtroppo per loro, poterono riscontrare che le specie pregiate, che loro cercavano di catturare, erano poco disponibili, a scapito di altre che non avevano alcun valore commerciale (ad esempio, squali e razze). Il problema interessò grandemente il biologo *Umberto D'Ancona*, che ipotizzò la sostituzione di una specie di pesce -le prede- con un'altra specie -i predatori-: ma non riusciva a capire perché se entrambe le specie non erano state predate dall'uomo, allora si trovassero, nei mari, più dell'una che dell'altra. Fortuna sua, il suocero ⁹ era *Vito Volterra*, uno dei principali Matematici dell'epoca e, richiesto di un parere, egli mise in campo il proprio ingegno fornendo non solo una spiegazione dell'evento a cui stavano assistendo, ma anche creando un modello che potesse prevedere l'andamento del numero di individui di due popolazioni interagenti, di cui una è predatrice rispetto all'altra. Poi, non accontentandosi di ciò, migliorò ulteriormente il modello matematico per studiare anche eventuali effetti dovuti a "pesca di frodo". Volterra, inoltre, ebbe anche l'onestà di citare un ricercatore chimico, *Alfred J. Lotka*, che aveva trovato un modello simile al suo, nello studio di alcune reazioni chimiche. Il modello consiste in un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari, che prevede oscillazioni periodiche del numero di individui presenti nelle due popolazioni. Intuitivamente il fatto è che se aumentano i predatori, le prede diminuiscono ma, venendo meno queste, mancherà di che nutrirsi ai predatori, pertanto, a seguito di una diminuzione delle prede, diminuiranno anche i predatori. Diminuendo i predatori però, le prede possono crescere in numero, non essendo messe in pericolo dai predatori stessi, quindi tenderanno a moltiplicarsi ed aumentare di numero: a questo punto, essendoci abbondanza di prede, anche i predatori potranno aumentare di numero, avendo disponibilità di mangiare e così si ricomincia il ciclo da capo. Questa descrizione esce direttamente dalla soluzione del modello che affronteremo utilizzando un metodo numerico presentato prima ¹⁰.

3.1. Presentazione del modello. Sia $x = x(t)$ la densità della popolazione delle prede al tempo t ¹¹. Si $y = y(t)$ quella dei predatori. Sia α il tasso di crescita delle prede e β quello di mortalità dovuto ai predatori

⁹All'epoca dei fatti ancora "futuro suocero".

¹⁰Il più semplice: quello di Eulero.

¹¹Possiamo immaginare che sia semplicemente il numero degli individui, se pensiamo che sia prede che predatori vengano considerati occupare lo stesso spazio vitale. Altrimenti, come ogni densità, essa è definita come *il numero degli individui a km-quadrato*.

¹²; sia altresì γ il tasso di mortalità dei predatori e δ il tasso di crescita dei predatori ¹³. Ipotizziamo *idealmente* che il *cibo sia illimitato* per le prede e che il tasso di interazione tra le popolazioni sia proporzionale a $x \cdot y$ ¹⁴, allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Nei fatti stiamo dicendo: “La velocità con cui aumentano le prede è pari alla velocità di crescita ¹⁵, diminuita del tasso di predazione ¹⁶. Inoltre, la velocità con cui aumentano i predatori è pari alla velocità con cui crescono per via della presenza delle prede, diminuita della velocità con cui muoiono perché sono presenti in troppi rispetto alle prede”.

3.2. La soluzione. Approssimiamo il modello con il metodo di Eulero:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \cdot f_1(t_k; x_k), y_k \\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f_2(t_k; x_k, y_k) \end{cases}$$

Per effettuare una simulazione poniamo, ad esempio: $\alpha = 0.2$ e $\beta = 0.002$. Fissiamo anche i parametri per i predatori: $\gamma = 0.1$ e $\delta = 0.001$. Immaginiamo una popolazione iniziale di 100 unità per le prede e 80 per i predatori. Predisponiamo un foglio di calcolo per il calcolo numerico dei dati e riportiamo qui di seguito i risultati. Fissiamo anche il “passo” $h = \frac{1}{4}$.

Modello PREDI-PREDATORE di Lotka-Volterra.

Sia $x(t)$ il numero delle prede al tempo t , $y(t)$ il numero dei predatori al tempo t .
Approssimiamo la soluzione del sistema di equazioni con il metodo di Eulero.

$x' = 0,2x - 0,002xy$	Metodo numerico di Eulero
$y' = -0,1y + 0,001xy$	$x(k+1) = x(k) + hf_1(t(k), x(k), y(k))$
$x(0) = 100$	$y(k+1) = y(k) + hf_2(t(k), x(k), y(k))$
$y(0) = 80$	
passo $h = 0,25$	

t	x(t)	y(t)	f1(t,x,y)	f2(t,x,y)
0	100	80	4	0
0,25	101	80	4,04	0,08
0,5	102,01	80,02	4,0763196	0,1608402
0,75	103,02908	80,0602101	4,10875642	0,24250877
1	104,056269	80,1208372	4,13710301	0,32499167

primi 5 passi, ecc...

¹²Il tasso di mortalità è proporzionale agli incontri tra prede e predatori.

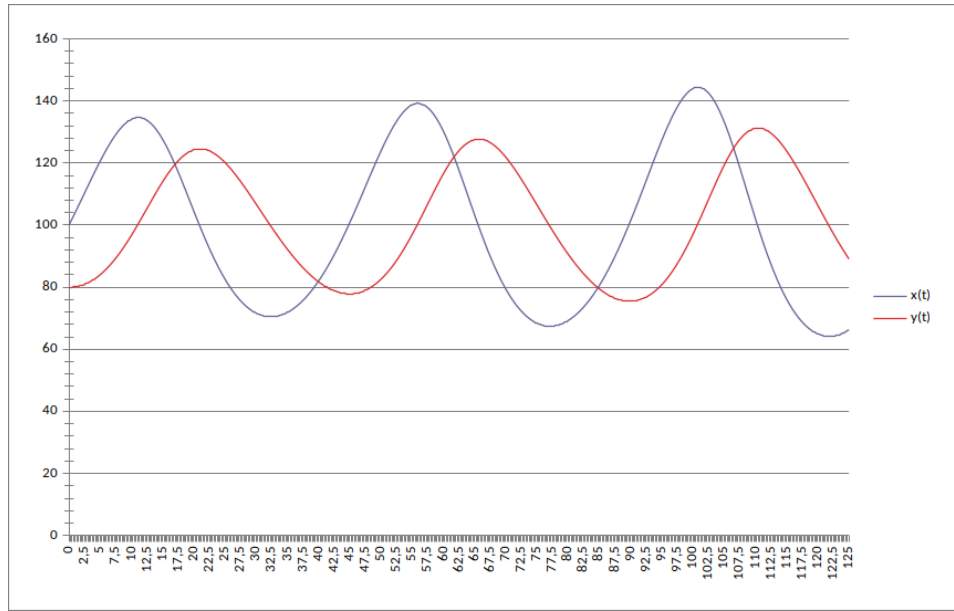
¹³Dovuto al consumo delle prede.

¹⁴Interazioni che avvengono in modo del tutto casuale, pertanto più prede e più predatori ci stanno, più è probabile che si incontrino.

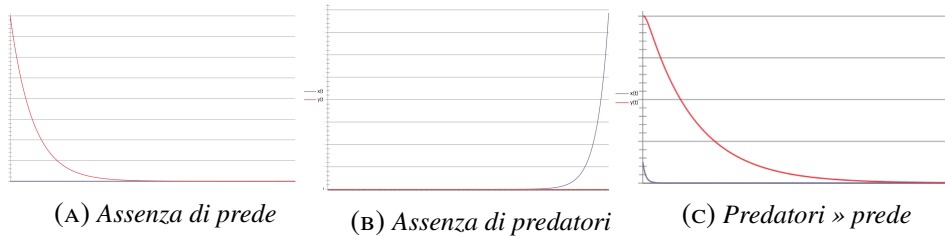
¹⁵Per nascite è “ αx ”.

¹⁶Per via degli incontri con i predatori, è “ βxy ”.

Trascinando le formula per un bel po' e mettendo a grafico i numeri per prede e predatori, si otterrà quest'altra interessante figura, che conferma l'intuizione iniziale riguardo all'interazione tra le due specie.



Ora possiamo verificare come, in assenza di prede, il modello predice l'estinzione dei predatori e, in assenza di predatori, ci sarà una crescita esponenziale delle prede. Inoltre si può simulare anche il fatto che se i predatori sono troppi, rispetto alle prede, si arriverà all'incresciosa situazione in cui si estinguono le prede e, pertanto, successivamente anche i predatori.



CAPITOLO 6

La Trasformata di Laplace

Una trasformata, in generale, è un “operatore” che associa una funzione, in modo biiettivo, ad un’altra ¹. Pierre Simon Laplace, uno dei più grandi Matematici di tutti i tempi, vissuto a cavallo tra la fine del ’700 e l’800, riconosciuto dallo stesso Napoleone come scienziato di notevole caratura ², interessato al calcolo delle probabilità -di cui scrisse un notevole trattato ³ - aveva il problema di determinare la probabilità associata alla somma di due o più variabili aleatorie. Oggi si sa che, per determinare questa probabilità, si deve operare una *convoluzione*, ma all’epoca non era ancora chiaro come si dovesse fare e, soprattutto, un approccio diretto avrebbe richiesto di calcolare migliaia di combinazioni ⁴. Inoltre, sapendo che una distribuzione di probabilità può essere descritta da alcuni parametri ad essa associati ⁵ denominanti *momenti*, Laplace aveva necessità di trovare un metodo per determinarli in modo semplice. Premesso questo, egli si rese conto che se utilizzava la funzione esponenziale e sfruttava le sue proprietà, poteva rendere tutti i calcoli molto più semplici. Se $f(x)$ denota la funzione di densità associata alla v.a. X , allora la **Funzione Generatrice dei Momenti** è definita come:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

¹In soldoni è una funzione che si applica su funzioni per ottenere altre funzioni!

²Napoleone stesso, matematico di buon livello, distratto dalla “politica”, ebbe comunque il tempo di leggere un lavoro di Laplace la “Exposition du système du monde” del 1796 e pare gli facesse notare: “Newton ha parlato di Dio nel suo Libro. Ho già sfogliato il vostro e non ho trovato questo nome una sola volta” al ché Laplace gli rispose: “Non ho avuto bisogno di questa ipotesi”.

³Quasi tutto quello che scrisse Laplace è stato notevole! il trattato a cui ci riferiamo è l’ “Essai Philosophique sur les Probabilités”; sono certamente anche da ricordare i cinque volumi de la “Mécanique Céleste”, che introdusse lo studio della meccanica su basi di analisi matematica (la meccanica galileiana e newtoniana era sviluppata principalmente su un modello geometrico).

⁴Basta pensare a questo semplice problema: si lanciano 500 dadi, qual è la probabilità che la somma sia esattamente 200?

⁵Tra cui **media, varianza, asimmetria, curtosi...**

Supponiamo di voler determinare la media oppure la varianza di una data v.a. X , possiamo procedere sviluppando in serie di Taylor la funzione esponenziale:

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots$$

e prendere il valore atteso, distribuendolo, per linearità, sui vari addendi, per cui:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = 1 + \mathbb{E}[X]t + \mathbb{E}[X^2] \frac{t^2}{2!} + \mathbb{E}[X^3] \frac{t^3}{3!} + \dots$$

osservando che i momenti che ci servono sono i coefficienti delle potenze di t , per determinarli basta derivare di volta in volta e annullare t . Per esempio:

$$\bar{X} = \frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{tX}] |_{t=0} = M'_X(0).$$

Quella che oggi, però, è conosciuta come *Trasformata di Laplace* non è esattamente la *Funzione Generatrice dei Momenti*, sebbene siano praticamente la stessa cosa!

DEFINIZIONE 6. Si chiama **trasformata di Laplace** della funzione $f(x)$ il funzionale \mathcal{L} definito da:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

Si può osservare che la differenza tra funzione generatrice dei momenti e trasformata di Laplace è essenzialmente la sostituzione di $-t$ a posto di s ed il dominio che viene ristretto solo all'intervallo di valori positivi $[0, +\infty]$. D'altra parte oggi giorno la trasformata di Laplace la si usa principalmente nello studio di sistemi dinamici, per cui la variabile x assume il significato di *tempo* o di qualche altra grandezza fisica. Una cosa notevole, che rese l'utilizzo della trasformata di Laplace quasi indispensabile al suo tempo, è che se X, Y sono due v.a. indipendenti e $Z = X + Y$ ne indica la loro somma, allora:

$$\mathcal{L}\{f_Z\} = \mathcal{L}\{f_X\} \cdot \mathcal{L}\{f_Y\}$$

ovvero *la trasformata della somma è il prodotto delle trasformate*. Trovare il prodotto delle due funzioni risulta molto più semplice che risolvere un integrale di convoluzione: una volta ottenuto il prodotto, si *torna indietro* tramite la trasformata inversa ⁶. Laplace fu anche uno dei primi ad intuire che sommando molte variabili indipendenti, la distribuzione di tale somma

⁶Detta anche **anti-trasformata di Laplace**.

si avvicina invariabilmente ad una distribuzione normale: ovvero si distribuiva come una curva a campana ⁷ e riuscì a capire questo fatto notevole, proprio sfruttando questo strumento potentissimo che è la sua trasformata ⁸.

Vediamo ora le principali proprietà della trasformata di Laplace e calcoliamone qualcuna per le funzioni più comuni. Infine vedremo come utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere o.d.e.: la potenza del metodo è che la trasformata di Laplace fa passare dalle equazioni differenziali a equazioni algebriche, le cui risoluzioni sono sicuramente più agevoli. Ottenute le soluzioni, si può ritornare indietro alla soluzione dell'equazione differenziale, tramite l'antitrasformata di Laplace.

1. Trasformata di Laplace: sue proprietà e qualche calcolo

Perché la trasformata di Laplace è diventata così importante nel corso degli anni? la risposta si può dare semplicemente verificando le sue numerose proprietà, che permettono di semplificare parecchio i calcoli in molti contesti, soprattutto nel reame delle equazioni differenziale e nella teoria dei segnali.

TEOREMA 1 (Proprietà della trasformata di Laplace). *La trasformata di Laplace possiede le seguenti proprietà:*

- (1) **Linearità:** *la trasformata di una combinazione lineare è la combinazione lineare delle trasformate, ovvero:*

$$\mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\}(s) = a \mathcal{L}\{f(x)\}(s) + b \mathcal{L}\{g(x)\}(s)$$

qui e nel seguito indicheremo con $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$ ed analogamente per la trasformata di $g(x)$, che sarà indicata con $G(s)$ pertanto possiamo scrivere:

$$\mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\}(s) = a F(s) + b G(s).$$

- (2) **Traslazione nel tempo:** *uno spostamento nel tempo corrisponde ad una moltiplicazione con una esponenziale, ovvero:*

$$\mathcal{L}\{f(x - x_0)\}(s) = e^{-s x_0} F(s).$$

- (3) **Traslazione in frequenza:** *Moltiplicare nel tempo per e^{ax} equivale a traslare $F(s)$:*

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\}(s) = F(s - a).$$

⁷Questo è noto come **Teorema del Limite Centrale**.

⁸Tutta la Statistica inferenziale è basata sull'ipotesi di normalità e sul fatto che all'aumentare del numero di prove, o di individui in un campione, la distribuzione a cui ci si può riferire, è proprio la *Distribuzione Normale!*

(4) **Derivazione nel tempo:** Le derivate diventano dei polinomi in s :

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

e, più in generale:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}(s) = s^n \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+).$$

(5) **Integrazione nel tempo:** l'integrale si ottiene tramite una divisione per s :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

(6) **La convoluzione:** la convoluzione diventa un prodotto, ovvero:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\}(s) = F(s) \cdot G(s).$$

(7) Per i valori iniziali e finali, se le condizioni sono soddisfatte, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

e, inversamente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s).$$

(8) **Differenziazione:** moltiplicare per x nel tempo, corrisponde a derivare la trasformata, ovvero:

$$\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}(s) = -\frac{dF(s)}{ds}.$$

Prima di dimostrare ogni punto di questo teorema, facciamo notare che se si applica una trasformata di Laplace ad una o.d.e., essa viene riscritta sotto forma di polinomio, la cui soluzione corrisponderà alla soluzione dell'equazione differenziale di partenza. Basterà riconoscere a quale funzione corrisponde la trasformata ottenuta, per determinare la soluzione dell'o.d.e. stessa!

Dimostrazione:

(1) La prima proprietà deriva direttamente dalla linearità degli integrali, infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (a f(x) + b g(x)) dx = \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + b \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = a F(s) + b G(s). \end{aligned}$$

(2)

$$\mathcal{L}\{f(x - x_0)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x - x_0) dx =$$

effettuando una semplice sostituzione lineare: $x - x_0 = z$ che lascia inalterati i differenziali, si ottiene:

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(z+x_0)} f(z) dz = e^{-sx_0} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sz} f(z) dz = e^{-sx_0} \cdot F(s).$$

(3)

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{ax} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{(-s+a)x} f(x) dx =$$

posto $s - a = s'$ si ottiene:

$$= \int_0^{\infty} e^{-s'x} f(x) dx = \mathcal{L}\{f(x)\}(s') = F(s - a).$$

(4)

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx =$$

integrando per parti

$$= [f(x) \cdot e^{-sx}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot (-s) \cdot f(x) dx =$$

$$= -f(0^+) + s \cdot F(s) = s \cdot F(s) - f(0^+).$$

In generale, l'integrale della derivata n -esima si ottiene integrando per parti ripetutamente e quindi:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n)}(x) dx =$$

$$= [f^{(n-1)}(x) e^{-sx}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-sx} f^{(n-1)} dx.$$

Ora, il primo addendo dà $-f^{(n-1)}(0^+)$ mentre il secondo addendo diventa:

$$s \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n-1)}(x) dx,$$

che si deve integrare nuovamente per parti.

Chiaramente, ad ogni integrazione compare un altro addendo ottenuto come una derivata di ordine inferiore, moltiplicato per un fattore s ed un altro integrale da svolgere per parti: questo si può

fare finché si giunge al primo ordine di derivazione nel secondo addendo ⁹. Se si scrivono ordinatamente tutti gli addendi si trova:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n)}(x) dx = -f^{(n-1)}(0^+) - s \cdot f^{(n-2)}(0^+) +$$

$$-s^2 \cdot f^{(n-3)}(0^+) - \dots - s^{n-1} \cdot f(0^+) + s^n \cdot F(s).$$

(5)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^x f(t) dt dx =$$

nuovamente operando una integrazione per parti,

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \cdot \int_0^x f(t) dt\right]_{x=0}^{\infty} + \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

da cui:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{1}{s} \cdot F(s).$$

(6)

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt\right) dx =$$

scambiando l'ordine di integrazione ¹⁰ e un cambio di variabile lineare,

$$= \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_x^{\infty} g(x-t) e^{-sx} dx\right) dt,$$

ponendo $z = x - t$, l'integrale tra le parentesi tonde diventa

$$\int_0^{\infty} g(z) e^{-s(z+t)} dz = e^{-st} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sz} g(z) dz = e^{-st} G(s)$$

per cui, sostituendo si ottiene ancora, considerando che $G(s)$ non dipende dalla variabile d'integrazione:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) G(s) dt = F(s) \cdot G(s).$$

(7) Si consideri la proprietà numero 4:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = s \cdot f(s) - f(0^+).$$

Se facciamo tendere all'infinito s , il primo membro tende a zero, dato che risulterebbe essere:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

⁹Dopodiché si ricade nella formula già trovata prima.

¹⁰Per le funzioni trasformabili secondo Laplace, il Teorema di Fubini è valido.

ergo anche il secondo membro dovrà tendere a zero, ovvero:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s) - f(0^+)) = 0$$

e questo significa proprio

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Da una considerazione analoga deriva anche la seconda uguaglianza.

(8) Infine, deriviamo $F(s)$ rispetto al parametro s :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right) &= \int_0^{\infty} \frac{d e^{-sx}}{ds} f(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} -x \cdot e^{-sx} \cdot f(x) dx = - \int_0^{\infty} e^{-sx} (x \cdot f(x)) dx = \\ &= -\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}(s), \end{aligned}$$

da cui, invertendo i segni, la tesi:

$$\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}(s) = -\frac{dF(s)}{ds}.$$

□

2. Le trasformate delle principali funzioni

Non rimane ora che calcolare qualche trasformata e compilare, come fatto per le derivate o per le espansioni polinomiali di Taylor, una tabella da consultare per rendere pratico e veloce l'utilizzo della trasformata di Laplace nelle applicazioni tecniche.

Prima di tutto la funzione costante:

$$f(x) = 1.$$

Applicando direttamente la definizione si ottiene:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx = \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-sx} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Poi, integrando questa funzione ricaviamo la trasformata della funzione $f(x) = x$:

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^x 1 dt \right\}(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Integrando ancora una volta si ricava:

$$\mathcal{L}\{x^2\}(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^x 2 \cdot x dt \right\}(s) = 2 \cdot \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s^3}.$$

Procedendo induttivamente in tal modo, si ricava la formula generica:

$$\mathcal{L}\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ora passiamo alle funzioni trascendenti: prima di tutto la funzione esponenziale $f(x) = e^{ax}$. Questa è facile perché si ricava dalla proprietà 3, considerando come $f(x)$ la funzione unitaria.

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot 1\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s - a) = \frac{1}{s - a}.$$

Le funzioni goniometriche: sia $f(x) = \sin(ax)$.

$$\mathcal{L}\{\sin(ax)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin(ax) \, dx =$$

integrando per parti due volte,

$$\begin{aligned} &= \left[e^{-sx} \cos(ax) \cdot \frac{-1}{a} \right]_{x=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \frac{-s}{a} \cdot \cos(ax) \, dx = \\ &= \frac{1}{a} + \left[e^{-sx} \cdot \frac{-s}{a^2} \sin(ax) \right]_{x=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{-s^2}{a^2} e^{-sx} \sin(ax) \, dx. \end{aligned}$$

Per cui, portando al primo membro dell'equazione, l'ultimo addendo, si ottiene:

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin(ax) \, dx = \frac{1}{a}$$

il che implica:

$$\mathcal{L}\{\sin(ax)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin(ax) \, dx = \frac{a^{\cancel{2}}}{s^2 + a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Tramite una derivazione otteniamo la trasformata del coseno:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(ax)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \cdot \frac{d}{dx} \sin(ax)\right\}(s) = \\ &= \frac{s}{a} \cdot \mathcal{L}\{\sin(ax)\}(s) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(ax) = \frac{s}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora le funzioni iperboliche: $f(x) = \sinh(ax)$.

$$\mathcal{L}\{\sinh(ax)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\}(s) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}\{e^{ax}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-ax}\}(s)) = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot 1\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-ax} \cdot 1\}(s)) =$$

per la proprietà 3

$$= \frac{1}{2} \cdot (F(s - a) - F(s + a)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

Per l'altra funzione iperbolica di base, possiamo utilizzare la regola di derivazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(ax)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \cdot \frac{d}{dx} \sinh(ax)\right\}(s) = \frac{1}{a} \cdot (s \cdot F(s) - f(0^+)) = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{s \cdot a}{s^2 - a^2} = \frac{s}{s^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Possiamo riassumere in una tabella i risultati trovati.

$f(x)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Invertendo la tabella, possiamo scrivere anche la seguente per l'**anti-trasformate di Laplace**.

$F(s)$	$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{ax}
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(ax)$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin(ax)}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(ax)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh(ax)}{a}$

Possiamo ora procedere a dare qualche esempio di risoluzione di modelli differenziali tramite l'applicazione delle trasformate (e anti-trasformate) di Laplace.

3. Trasformata utilizzata per risolvere o.d.e. lineari.

A parte che è opportuno fare un po' di pratica con le trasformate e le anti-trasformate, soprattutto è bene ricordarsi il metodo dei "fratti semplici" che è stato utilizzato per il calcolo di integrali di funzioni razionali, in questa sezione ci preme vedere come si può applicare quanto studiato in questo capitolo per la risoluzione di o.d.e. e, in particolare, di qualche problema di Cauchy.

Esempio: Risolvere il seguente P.C.

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 12. \end{cases}$$

Soluzione: Applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione differenziale e sfruttiamone subito la linearità:

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2 \cdot \mathcal{L}\{y'\}(s) - 3 \cdot \mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

Ora applichiamo le proprietà trovate nella sezione precedente:

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 \cdot \mathcal{L}\{y\}(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 F(s) - 3s - 12.$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{y\}(s) - y(0) = s F(s) - 3.$$

Pertanto otteniamo:

$$s^2 F(s) - 3s - 12 - 2 \cdot [s F(s) - 3] - 3 F(s) = 0$$

da cui:

$$F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}.$$

Per determinare la soluzione del P.C. basta trovare l'anti-trasformata di questa frazione: per fare ciò la scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} = \frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1}.$$

A questo punto, facendo il prodotto a croce, per determinare il numeratore della somma dei due fratti semplici ed uguagliando i due numeratori, otteniamo:

$$(A + B)s + A - 3B = 3s + 7$$

da cui:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - 3B = 7 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ricava subito:

$$4B = -4 \Rightarrow B = -1$$

e, conseguentemente $A = 4$. Pertanto abbiamo ricavato che la trasformata di Laplace della soluzione del P.C. è

$$F(s) = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}.$$

Applichiamo ora l'anti-trasformata a questa funzione, per trovare:

$$y(x) = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(x) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(x) = 4 \cdot e^{3x} - e^{-x}.$$

Osservazione: Si noti che la trasformata di Laplace ingloba in una unica equazione algebrica tutte le informazioni del P.C., in particolare le due condizioni iniziali.

Esempio: Riprendiamo il modello che descrive le "piccole oscillazioni" di un pendolo semplice, ovvero risolviamo l'o.d.e. del secondo ordine:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \cdot \theta = 0.$$

Soluzione: Applichiamo le trasformate di Laplace ad entrambi i membri, ottenendo:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\omega^2\theta(t)\}(s) = 0.$$

Sia $F(s)$ la trasformata di $\theta(t)$ ed utilizziamo le proprietà della trasformata:

$$s^2 F(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) + \omega^2 F(s) = 0.$$

$$F(s) = \frac{s\theta(0) + \dot{\theta}(0)}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \theta(0) + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \dot{\theta}(0).$$

Ora "appliciamo" l'antitrasformata ottenendo:

$$\theta(t) = \theta(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega} \sin(\omega t).$$

Osserviamo che, se sviluppiamo la forma goniometrica:

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)]$$

e confrontiamo questa espressione, con quella che abbiamo trovato come soluzione ¹¹, si potrebbero porre le seguenti due condizioni ¹²:

$$A \cdot \cos(\omega t) \cos(\varphi) = \theta(0) \cos(\omega t)$$

e

$$-A \cdot \cos(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}.$$

¹¹Quella nel riquadro.

¹²Possiamo "giocare" sulla scelta di A e di φ , pertanto, con due equazioni riusciamo a determinare entrambi i parametri!

Pertanto possiamo scrivere che:

$$A \cdot \cos(\varphi) = \theta(0) \quad \text{e} \quad -A \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}$$

e sommandone i quadrati, potremmo scrivere ancora:

$$A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = (\theta(0))^2 + \left(\frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}\right)^2$$

ovvero:

$$A = \sqrt{(\theta(0))^2 + \left(\frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}\right)^2}.$$

Con una scelta di A come quella testé ottenuta, la soluzione dell'*oscillatore armonico*¹³ diventa:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

4. Un piccolo approfondimento su una funzione particolare

Nella *teoria del campionamento* è fondamentale poter “segnare” dati ogni intervallo “tot” di tempo uguale: sarebbe quindi il caso di trovare una funzione che possa assumere un solo valore in un dato intervallo e poi che riprenda, a distanza regolare, un altro valore su un altro intervallo ecc... A tal fine, il sommo fisico Dirac, introdusse una “funzione impulsiva” che denominò “delta”. La **delta di Dirac** “applicata” ad un “segnale continuo” e trasformata secondo Laplace, diventa uno strumento indispensabile per studiare i segnali continui campionati nel tempo.

DEFINIZIONE 7. La funzione **delta di Dirac**, indicata con $\delta(x)$, è definita zero su ogni punto dell'asse reale, ad eccezione che per $x = 0$ in cui essa prende valore tendente all'infinito.

Per capire bene il discorso, soprattutto perché la “delta di Dirac” non è una funzione nel senso ordinario del termine¹⁴, immaginiamo di avere la seguente famiglia di funzioni *parametrizzata* da un indice ϵ :

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & x \in [0, \epsilon] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

¹³Ricordiamo che anche l'oscillazione di un punto materiale soggetto unicamente alla forza elastica, viene modellizzato dalla stessa o.d.e. delle piccole oscillazioni del pendolo e che, per questo, entrambe le equazioni prendono il nome di “oscillatore armonico”.

¹⁴Infatti fa parte di un'altra categoria di “funzioni”, dette **distribuzioni**.

Ci si può facilmente convincere che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\epsilon}(x) \, dx = \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \, dx = \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon = 1.$$

Questo per ogni $\epsilon \geq 0$, per cui potremmo pensare che, per ϵ tendente a zero, sebbene la quantità $\frac{1}{\epsilon}$ tenda all'infinito, comunque l'integrale continua a valere 1; ovvero possiamo definire quella funzione particolare $\delta(x)$, proprio come una "funzione" il cui integrale vale 1 nel singolo punto $x = 0$, dovendo essere nulla, come funzione, in ogni altro punto dell'asse reale ¹⁵ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1$$

e, in particolare, possiamo interpretare la funzione delta di Dirac come il limite, per ϵ infinitesimo, della famiglia $\delta_{\epsilon}(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x).$$

La trasformata di Laplace della funzione delta di Dirac risulta essere:

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\}(s) = \int_0^{+\infty} \delta(x) \cdot e^{-sx} \, dx = \int_0^{\epsilon} \delta_{\epsilon}(x) \cdot e^{-sx} \, dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \delta_{\epsilon}(x) \cdot e^{-sx} \, dx,$$

in cui si fa tendere a zero ϵ , pertanto ci accorgiamo che il secondo addendo si annulla ¹⁶ ed il primo membro diventa come:

$$\int_0^{+\epsilon} \delta_{\epsilon}(x) \cdot 1 \, dx,$$

dato che, per una quantità q infinitesima, $e^q \sim 1$; ergo:

$$\int_0^{+\epsilon} \delta_{\epsilon}(x) \cdot 1 \, dx = 1,$$

per come scritto prima e, in definitiva:

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\}(s) = 1.$$

Non dovrebbe essere difficile interpretare la *delta di Dirac* come un "operatore" che **estrae** il valore di un segnale al tempo zero: se si effettua, poi, una "traslazione" in avanti, nel tempo t_0 , allora la delta estrarrà il valore della funzione, a cui è "applicata", al tempo t_0 , ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(t - t_0) \, dt = f(t_0).$$

¹⁵Si noti che l'area sottesa in corrispondenza di "un punto" deve essere nulla -ovvero non c'è area per un segmento!- ma la funzione δ definisce un "rettangolo" di base infinitesima ed altezza infinita: in tal modo, l'area del rettangolo risulterebbe espressa nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

¹⁶La $\delta_{\epsilon}(x)$ è zero fuori da $[0, \epsilon]$.

Calcolando la trasformata di Laplace, della delta "traslata" ¹⁷ si otterrà:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}(s) = e^{-st_0},$$

che si può interpretare in tal guisa: *"un impulso ritardato nel tempo, diventa una esponenziale nel dominio della trasformata di Laplace."*

Ora, se consideriamo un **"treno di impulsi di Dirac"**:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT),$$

in cui T rappresenta il periodo di campionamento e, pertanto, nT gli istanti di campionamento, e lo applichiamo ad un segnale continuo $f(t)$, si ottiene il segnale campionato:

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT).$$

Passando alla trasformata di Laplace possiamo scrivere:

$$\mathcal{L}\{f_s(t)\}(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) e^{-snT},$$

da qui si può procedere definendo la *trasformata Z...* ma il discorso poi trascenderebbe i limiti della nostra trattazione, quindi ci fermiamo. Gli studenti dell'Istituto Tecnico continueranno, invece, questo discorso nelle materie di indirizzo, in cui avranno modo di studiare il campionamento e parte di "Teoria dei segnali".

¹⁷Fare questo come esercizio!

Serie di Fourier ed approssimazione delle funzioni periodiche

1. Funzioni periodiche

In questo capitolo trattiamo un tipo importantissimo di funzione, sia per quanto riguarda l'aspetto teorico, sia per quanto riguarda l'applicazione tecnica e pratica. Tali funzioni si possono rappresentare completamente tramite somme di funzioni goniometriche elementari: esse sono le funzioni periodiche. Sussiste una teoria completa e molto elegante che le riguarda ed è nota come *Analisi di Fourier*. Innanzitutto definiamo l'oggetto di studio del presente capitolo:

DEFINIZIONE 8. *Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste un numero T tale per cui $f(x + T) = f(x)$. Il numero T si chiama anche periodo della funzione.*

I primi semplici ed immediati esempi di funzioni periodiche sono dati dalle funzioni goniometriche elementari $\sin(x)$ e $\cos(x)$, entrambe periodiche con $T = 2\pi$ (si dice anche che sono 2π -periodiche). Dopodiché $\tan(x)$ e $\cot(x)$ forniscono altri due esempi di funzioni π -periodiche.

La cosa interessante, per le funzioni periodiche, è che una volta definita su un qualsiasi intervallo di lunghezza T , esse sono completamente note su tutto \mathbb{R} : infatti poi si ripetono esattamente, sugli intervalli precedenti e successivi, come in quello considerato dappprincipio. Chiaramente si possono definire funzioni su intervalli di \mathbb{R} e poi *prolungare* per periodicità la funzione su tutto \mathbb{R} semplicemente riproponendo sugli intervalli precedenti o successivi, della stessa lunghezza, il “pezzetto” di funzione precedentemente definito. Un'altra osservazione da fare è che, dovendosi ripetere, ci saranno infiniti valori del dominio che verranno associati allo stesso valore del codominio ¹. Questo vuol dire che l'unico modo per “invertire” una funzione periodica è di restringere il suo dominio ad un dato intervallo di lunghezza T . Ad esempio, dato che $\sin(x)$ è 2π -periodica, essa è completamente nota conoscendo come si comporta nell'intervallo $[0, 2\pi]$ od

¹Ovvero una funzione periodica non è iniettiva.

anche $[-\pi, \pi]$ od intervalli del genere ². Per trovare la funzione inversa $\arcsin(x)$, dovremo, per forza, considerare solo uno degli intervalli considerati prima, sebbene uno qualsiasi di esso vada bene!

Ora, la cosa davvero notevole è che, come si dimostra nella Analisi di Fourier, una qualsiasi funzione periodica la si può approssimare tramite una somma di multipli di funzioni goniometriche elementari, meglio detto “tramite una combinazione lineare di funzioni goniometriche elementari”, addirittura *globalmente* (quindi la situazione è di gran lunga migliore di quanto già visto per le approssimazioni -solo locali- ottenute tramite polinomi di MacLaurin/Taylor) ³. Noi non svilupperemo per intero ed in forma generale la teoria di Fourier, nè dimostreremo quali sono le condizioni minime di esistenza di sviluppo in “serie” trigonometrica d’una funzione periodica; ci basti sapere che **le funzioni T -periodiche e continue o con al più un insieme numerabile di salti finiti** si possono rappresentare con uno sviluppo di tale tipo. Concentriamoci, quindi, su funzioni continue che presentano al più dei salti “quantificabili” ⁴ e, per semplicità di presentazione, 2π -periodiche ⁵.

DEFINIZIONE 9. *Una espressione del tipo*

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

si chiama polinomio trigonometrico.

Supponiamo che la nostra funzione 2π -periodica continua (con al massimo delle discontinuità di prima specie) si possa approssimare con un polinomio trigonometrico, ovvero che

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Affinché questa approssimazione sia buona, dovrà essere minima la differenza tra la funzione ed il polinomio stesso, ovvero l’errore che si commette nella sostituzione deve essere il più piccolo possibile. Prima di trovare quale tra i polinomi trigonometrici rendono minimo l’errore di approssimazione, è d’uopo premettere alcune osservazioni importanti riguardo lo spazio delle funzioni.

Se si definiscono le solite operazioni di somma tra funzioni e prodotto con numeri, si verifica agevolmente che l’insieme delle funzioni costituisce uno

²Per esempio $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ anche se è una scelta poco usuale...

³C’è, a tal proposito, un bellissimo teorema di Weierstrass.

⁴Ovvero di cui si può dire di quanto sono lunghi.

⁵Le funzioni con periodo generico T si possono trattare, tramite una opportuna dilatazione dell’asse delle ascisse, esattamente come le 2π -periodiche, sicché una tale restrizione non lede alla generalità della trattazione.

spazio vettoriale. Questo significa che ha senso parlare di prodotto scalare tra funzioni, dato che esse possono essere viste come dei vettori, nonché definire la *lunghezza* di una funzione tramite l'espressione

$$\sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Ora, il prodotto scalare tra vettori è definito come la somma dei prodotti delle componenti omologhe dei due vettori, ovvero:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i,$$

dove n rappresentava il numero di componenti dei due vettori, ma per le funzioni una tale definizione perde di senso, dato che non si può più parlare di “componenti” così come si era parlato per i vettori “geometrici”. Possiamo però scegliere come prodotto scalare una espressione che assomiglia molto a quella sommatoria, nei fatti poniamo:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x) \cdot g(x) dx$$

laddove D rappresenta il dominio, comune, di definizione delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Osserviamo che questo non è il solo modo per formare un *prodotto scalare* tra funzioni, ma per noi basta ⁶. Dato che l'insieme delle funzioni è uno spazio vettoriale, abbiamo motivo di chiederci se si può trovare una base per tale spazio, in modo che gli elementi di tale insieme possano essere espressi come combinazione lineare degli elementi della base. Dire che le funzioni T -periodiche, continue con al più salti finiti, sono rappresentate da opportuni polinomi trigonometrici $P_n(x)$ significa dire proprio che l'insieme delle funzioni con le quali si “costruiscono” i polinomi trigonometrici:

$$S = \{1, \sin kx, \cos kx | k = 1, 2, \dots\},$$

costituisce una *base* per l'insieme delle funzioni di quel tipo.

⁶Vogliamo però far presente che, astruendo le proprietà caratteristiche del prodotto scalare tra vettori “geometrici”, si definisce *prodotto scalare* una qualsiasi operazione tra gli elementi di un insieme che goda delle seguenti proprietà:

- i. Positività, ovvero $\langle a, a \rangle \geq 0$
- ii. Simmetricità, quindi $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- iii. Bilinearità, vale a dire $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$ e $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$. Inoltre, se λ è uno scalare (numero), allora $\langle \lambda a, b \rangle = \langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$.

Il fatto che S sia una base lo prendiamo per vero ⁷, piuttosto verificiamo che restringendo l'attenzione all'intervallo $[-\pi, \pi]$, S è costituito da funzioni mutuamente "ortogonali": questo si dimostra, come ricordiamo dai capitoli precedenti, se otteniamo i prodotti scalari tra i "vettori" tutti uguali a zero.

$$\langle 1, \sin(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = \left[-\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k}(1 - 1) = 0.$$

$$\langle 1, \cos(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}(0 - 0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle \sin(kx), \cos(kx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \cos(kx) dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx \cdot \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \cos(kx) dx, \end{aligned}$$

quindi:

$$\langle \sin(kx), \cos(kx) \rangle = \frac{1}{k}(0^2 - 0^2) - \frac{1}{k} \langle \sin(kx), \cos(kx) \rangle,$$

(ovvero, portando le quantità uguali al primo membro):

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) \langle \sin(kx), \cos(kx) \rangle = 0$$

per cui:

$$\langle \sin(kx), \cos(kx) \rangle = 0$$

Analogamente si può dimostrare che:

$$\langle \sin(kx), \sin(hx) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \cos(kx), \cos(hx) \rangle = 0$$

per $h \neq k$.

Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} \langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(kx) dx = \left[-\frac{1}{k} \cos kx \cdot \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \cos(kx) \cdot k \cos(kx) dx, \end{aligned}$$

quindi:

$$\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(kx) dx = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \sin^2(kx) dx,$$

⁷La dimostrazione si può trovare in uno dei libri citati in bibliografia, comunque esula dalle finalità del nostro trattato.

ovvero:

$$\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(kx) dx = 2\pi - \langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle,$$

per cui:

$$2 \cdot \langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = 2\pi$$

e, in definitiva:

$$\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = \pi.$$

Analogamente si dimostra che:

$$\langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle = \pi.$$

Se noi ora dividiamo gli elementi di S rispettivamente per $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ e nuovamente per quest'ultimo, ovvero utilizziamo come base il sistema:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \mid k = 1, 2, \dots \right\},$$

allora la base ottenuta, oltre a rimanere ortogonale, risulta anche *normalizzata*, ovvero di lunghezza unitaria per ogni elemento. In pratica si comporta come la base canonica di \mathbb{R}^2 , data da $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ora, ricordiamoci che il prodotto scalare rappresenta la proiezione di un vettore lungo la direzione definita dall'altro, quindi i prodotti:

$$(2) \quad \left\langle f(x), \frac{1}{2\pi} \right\rangle, \left\langle f(x), \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle f(x), \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

possono essere ben visti come le “componenti”⁸ di $f(x)$ lungo le direzioni ortogonali fornite dai versori della base \mathcal{S} , per l'insieme delle funzioni 2π -periodiche e continue (con al più delle discontinuità di prima specie). I numeri, che si ottengono tramite i prodotti scalari definiti in (2), sono noti come *coefficienti di Fourier* per la funzione f .

Ritornando al nostro problema iniziale di approssimazione globale di una funzione periodica con un polinomio trigonometrico, supponiamo ora che $f(x)$ si possa davvero rappresentare (e quindi approssimare) con un tale tipo di polinomio, ovvero che:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

⁸Essendo le “proiezioni” della funzione lungo le direzioni date dai vettori della base.

Prendendo i prodotti scalari, una alla volta, con gli elementi della base \mathcal{S} e pensando che l'approssimazione ottenuta sia così buona da poter essere considerata una uguaglianza esatta, otteniamo:

$$\left\langle f(x), \frac{1}{2\pi} \right\rangle = \left\langle a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \frac{1}{2\pi} \right\rangle,$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) dx \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx \end{aligned}$$

ed essendo gli integrali degli ultimi due addendi nulli per ogni valore di k , segue che:

$$\boxed{a_0 = \left\langle f(x), \frac{1}{2\pi} \right\rangle.}$$

Poi,

$$\left\langle f(x), \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \left\langle a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)), \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx) dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n a_i \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(ix) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n b_i \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(ix) dx \end{aligned}$$

e, tenendo presente della ortonormalità degli elementi della base \mathcal{S} , si deduce che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a_k \cdot \pi + 0, \quad \text{da cui:} \\ \sqrt{\pi} a_k &= \left\langle f(x), \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \left\langle f(x), \cos(kx) \right\rangle.} \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \sin(kx) \rangle.$$

Da queste considerazioni, possiamo dedurre che, nel caso la funzione sia effettivamente approssimabile per mezzo d'un polinomio trigonometrico, allora per la scelta dei coefficienti del polinomio, è logico che si scelgano quelli di Fourier. Ora faremo vedere che effettivamente i coefficienti di Fourier di $f(x)$ sono quelli che meglio realizzano l'approssimazione con polinomi trigonometrici, ovvero dimostreremo -finalmente- che la differenza $f(x) - P_n(x)$ è minima se a_0 , a_k e b_k corrispondono ai coefficienti di Fourier della funzione. In verità il discorso è molto più generico che solo per la scelta della base \mathcal{S} e, visto che è comunque abbastanza semplice, lo faremo in modo generico per una qualsiasi base ortonormale.

Sia $S = \{\phi_k | k = 1, 2, \dots\}$ una base ortonormale per un insieme di funzioni e $P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$ una combinazione dei "versori" della base mediante dei coefficienti (numerici) c_k . Vogliamo determinare questi coefficienti in modo che la differenza $f(x) - P_n(x)$ sia minima. Consideriamo dunque la "lunghezza" del "vettore" $f(x) - P_n(x)$ ed, in particolare, il suo quadrato:

$$\langle f(x) - P_n(x), f(x) - P_n(x) \rangle.$$

Questa quantità è uguale, per le proprietà dei prodotti scalari, a:

$$\langle f, f \rangle - 2 \langle f, \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^n c_k \phi_k, \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \rangle,$$

ovvero a:

$$l^2(f) - 2 \sum_{k=1}^n \langle f, \phi_k \rangle c_k + \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Completando il quadrato, è facile giungere alla conclusione che:

$$\begin{aligned} & \langle f(x) - P_n(x), f(x) - P_n(x) \rangle = \\ & = l^2(f) - \sum_{k=1}^n (\langle f, \phi_k \rangle)^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - \langle f, \phi_k \rangle)^2 \end{aligned}$$

e questa espressione è minima quando l'ultima sommatoria risulta nulla, ovvero se:

$$c_k - \langle f, \phi_k \rangle = 0,$$

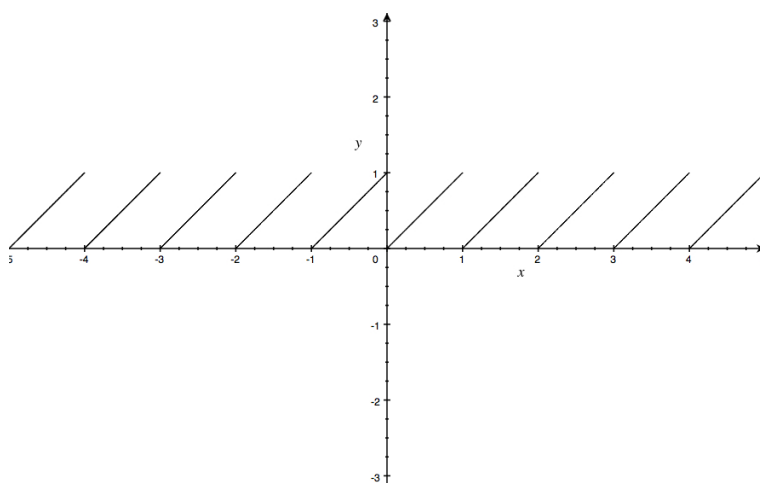
ergo, la differenza minima tra f e $P_n(x)$ si ottiene per:

$$c_k = \langle f, \phi_k \rangle$$

ovvero quando i coefficienti sono scelti in modo che siano proprio quelli di Fourier.

2. Esempi di approssimazione

Consideriamo solo due semplici esempi di funzioni: il primo è la funzione che genera il profilo a “dente di sega”, ottenuto prolungando per periodicità, su tutto l’asse reale, la funzione $f(x) = x$ definita sull’intervallo $[0, 1]$. Vedere la seguente figura:



Troviamoci i coefficienti di Fourier per tale funzione, dopo aver considerato l’affinità che trasforma l’intervallo $[-\pi, \pi]$ nell’intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ⁹.

Nel nostro caso basta considerare la trasformazione:

$$x \mapsto \frac{x}{2\pi} \quad \text{ovvero:} \quad x_v = 2\pi \cdot x_N,$$

dove i pedici indicano se la variabile da considerare è quella “nuova” (presa in $[0, 1]$) oppure la vecchia (presa in $[-\pi, \pi]$). A seguito della trasformazione calcoliamo i coefficienti tramite le formule:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_0^1 f(x_N) dx_N = \int_0^1 f(x_N) dx_N,$$

$$a_k = 2\pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x_N) \cos(2\pi k x_N) dx_N = 2 \int_0^1 f(x_N) \cos(2\pi k x_N) dx_N$$

⁹Nota che noi stiamo considerando la funzione definita in $[0, 1]$ ma, data l’estensione per periodicità, l’importante è trovare un intervallo di lunghezza $1 - 0 = 1$ da mettere in corrispondenza biunivoca con $[-\pi, \pi]$.

e

$$b_k = 2\pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x_N) \sin(2\pi k x_N) dx_N = 2 \int_0^1 f(x_N) \sin(2\pi k x_N) dx_N.$$

Per il seguito non scriveremo più il pedice $_N$ essendo esso sottinteso e chiaro. Quindi si ha:

$$a_0 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

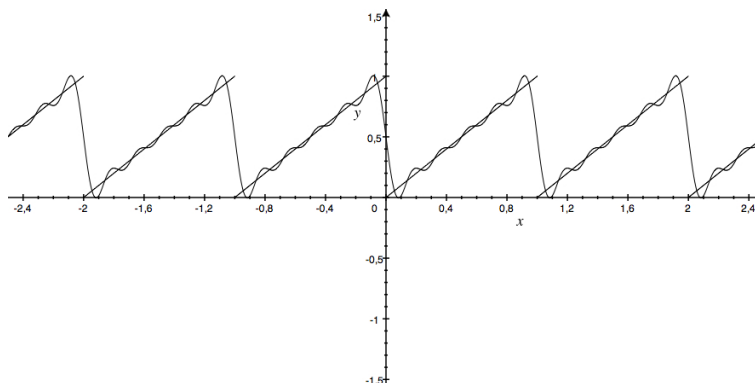
$$\begin{aligned} a_k &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi k x) dx = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2\pi k} x \sin(2\pi k x) \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \sin(2\pi k x) dx \right\} = \\ &= 0 + \frac{1}{2(\pi k)^2} [\cos(2\pi k x)]_0^1 = \frac{\cos(2\pi k) - 1}{2(k\pi)^2}. \end{aligned}$$

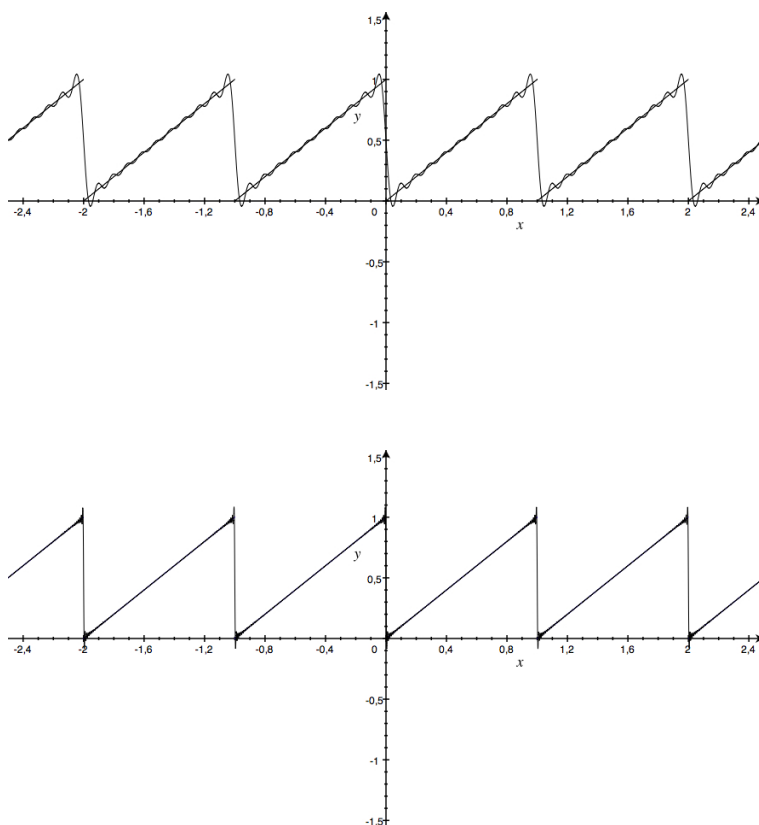
$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi k x) dx = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2\pi k} x (-\cos(2\pi k x)) \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \cos(2\pi k x) dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi k} \cos(2\pi k) + \frac{1}{2(k\pi)^2} [\sin(2\pi k x)]_0^1 = -\frac{\cos(2\pi k)}{k\pi} + 0 = -\frac{\cos(2\pi k)}{k\pi}. \end{aligned}$$

Costruiamo, dunque, i polinomi trigonometrici, in base al numero di addendi n della sommatoria, come segue:

$$P_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\cos(2\pi k) - 1}{2(k\pi)^2} \cdot \cos(2\pi k x) - \frac{\cos(2\pi k)}{k\pi} \cdot \sin(2\pi k x) \right).$$

Di seguito riportiamo i grafici dei polinomi approssimanti per n uguale, nell'ordine, a 5, 10 e 100, mantenendo, sullo sfondo, la funzione $f(x)$.



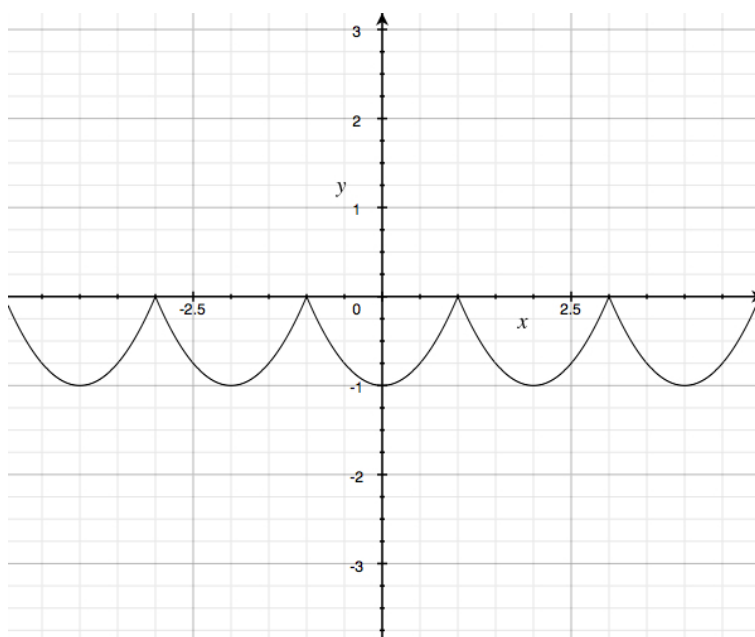


Delle osservazioni importanti sono da fare, prima di concludere questo capitolo: notiamo che la funzione che ci forniva il profilo (od il *segnale*) a dente di sega, presenta infinite discontinuità di prima specie, mentre il polinomio trigonometrico, essendo combinazione di funzioni continue, è esso stesso continuo, per cui nei punti di discontinuità della funzione si verifica un fenomeno “strano”. In pratica il grafico di $P_n(x)$, nei punti di discontinuità della funzione, tende a diventare verticale¹⁰. Per fare questo, comunque, essendo composto da funzioni oscillanti, il polinomio dovrà -in un certo senso- sfogare l’oscillazione da qualche parte: notiamo infatti che in prossimità dei punti di discontinuità il grafico di $P_n(x)$ oscilla molto velocemente. Questo fenomeno è noto anche come *fenomeno di Gibbs*: anzi si osserva che più è alto il numero degli addendi, più le oscillazioni si “spostano” verso i punti di discontinuità, facendo in modo che nei punti di continuità (lontani a sufficienza dai punti di discontinuità) il polinomio diventi il più vicino possibile al grafico di $f(x)$ (infatti vediamo, nei grafici

¹⁰Non potendo comunque mai raggiungere questo stato, perché alcun tratto verticale potrebbe rappresentare il grafico d’una funzione!

proposti precedentemente, che nell'ultimo con ben 100 addendi della sommatoria, i tratti obliqui della funzione sono per la maggior parte sovrapposti a quelli del polinomio trigonometrico).

Come altro esempio consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 1$ definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ed estesa per periodicità su tutto l'asse reale, come nel grafico seguente:



Procediamo esattamente come prima, ovvero effettuiamo una dilatazione dell'asse delle ascisse in modo che l'intervallo $[-\pi, \pi]$ venga messo in corrispondenza biunivoca con un intervallo di lunghezza 2. Per fare questo, basta considerare la trasformazione

$$x \mapsto \frac{x}{\pi},$$

e quindi i coefficienti li calcoliamo come:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

$$a_k = \pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \cos(\pi k x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(\pi k x) dx \quad \text{e}$$

$$b_k = \pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi k x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi k x) dx.$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 - 1 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3}, \\
 a_k &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \cos(\pi k x) \, dx = \left[\frac{1}{k\pi} (x^2 - 1) \sin(k\pi x) \right]_{-1}^1 + \\
 &\quad - \frac{1}{k\pi} \int_{-1}^1 2x \sin(k\pi x) \, dx = 0 - \frac{2}{k\pi} \cdot \left[-\frac{1}{k\pi} \cdot x \cos(k\pi x) \right]_{-1}^1 + \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^1 \cos(k\pi x) \, dx = \\
 &= \frac{2}{(k\pi)^2} \cdot (\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)) + \frac{2}{(k\pi)^2} [\sin(k\pi x)]_{-1}^1 = \frac{4 \cos(k\pi)}{(k\pi)^2}
 \end{aligned}$$

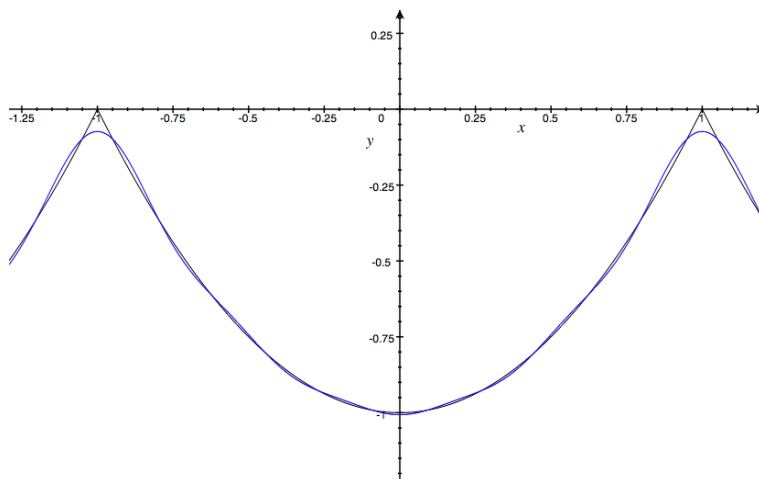
ed analogamente si può calcolare che tutti i b_k si annullano, ovvero:

$$b_k = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \sin(\pi k x) \, dx = 0.$$

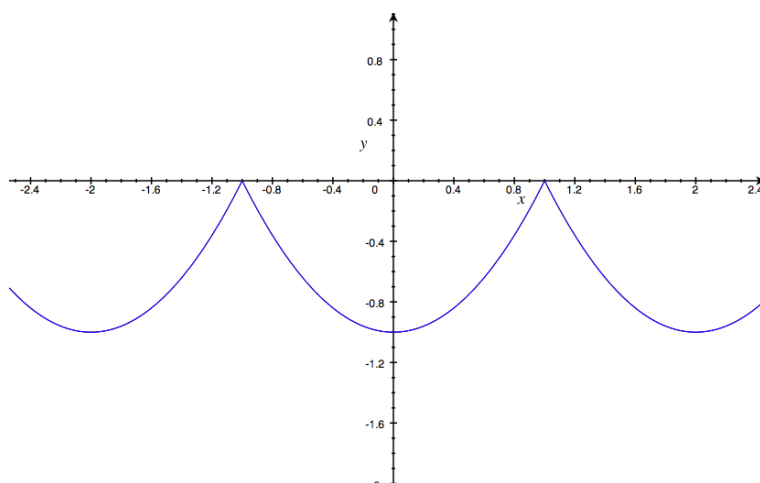
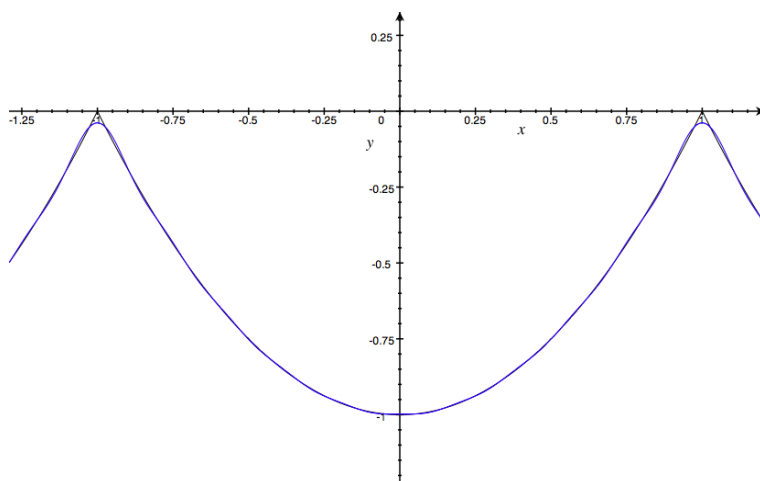
In questo caso il polinomio trigonometrico approssimante ha solo addendi di tipo coseno (cosa che avviene sempre se la funzione di partenza è pari ¹¹):

$$P_n(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{4 \cos(k\pi)}{(k\pi)^2} \cdot \cos(k\pi x) \right).$$

Seguono i grafici di $P_n(x)$ per n uguale a 5, 10 e 50.



¹¹Ovvero se $f(x) = f(-x)$ il ché significa anche che il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate!



Si noti come nei seguenti grafici non appaia più il fenomeno di Gibbs, che è, in effetti, dovuto alla presenza delle discontinuità di $f(x)$. C'è ancora da osservare, comunque, che la funzione presenta dei punti singolari¹² agli estremi degli intervalli $[-1 + kT, 1 + kT]$ con $k \in \mathbb{Z}$, mentre il polinomio trigonometrico è regolare (ben liscio dappertutto): questo si nota per un basso numero di addendi nella sommatoria, infatti il grafico di $P_n(x)$ non arriva “appuntito” agli estremi degli intervalli summenzionati, ma “smussa” la punta procedendo con più dolcezza; questo fatto è vero anche aumentando il numero degli addendi, solo che non si può notare se non facendo un forte zoom sulla zona dove compare la singolarità della funzione.

¹²Ovvero dei punti in cui non esiste la retta tangente al grafico, poiché in essi non è possibile determinare la derivata prima.

CAPITOLO 8

Esercizi

1. Relativi al Capitolo 1

- (1) Individuare le coppie di proposizioni che sono una la negazione dell'altra:
- L'automobilismo è uno sport.
 - Parigi non è la capitale della Francia.
 - La Luna gira intorno alla Terra.
 - Non è vero che l'automobilismo non è uno sport.
 - La Luna non gira intorno alla Terra.
 - Parigi è la capitale della Francia.
- (2) Determinare le tabelle di verità delle seguenti proposizioni:

$$(\neg p \wedge q) \vee q \quad \text{e} \quad q \vee \neg(p \wedge q).$$

- (3) Date le proposizioni $A =$ "Mosca è la capitale della Russia", $B =$ "Il Po scorre in Belgio" e $C =$ "80 è divisibile per 20" costruire le implicazioni seguenti, stabilendo per ciascuna il valore di verità:

$$A \rightarrow B; \quad A \rightarrow C; \quad B \rightarrow C.$$

- (4) Date le due proposizioni A e B , supposte vere, $A =$ "Il palloncino ha un piccolo foro" e $B =$ "Il palloncino si sgonfia", determinare il valore di verità di $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$.
- (5) Scrivi il "modus ponens" ed il "modus tollens" per la seguente implicazione materiale: « Se cado, allora mi faccio male ».
- (6) Stesso esercizio di prima, però per l'implicazione: «Se fischi allora mi disturbi».
- (7) *Cane che abbaia non morde.* Se fosse vera tale massima, cosa potresti dire riguardo ai seguenti casi?
- Il cane che ho di fronte non abbaia;
 - Il cane del mio vicino morde;
 - Il cane del mio amico abbaia come un forsennato!
- (8) *Se bevo il caffè, poi non dormo.* Cosa puoi concludere se:
- Non ho bevuto il caffè;
 - L'indomani ti dico che ho dormito meravigliosamente;
 - L'indomani mi vedi con due occhi da insonne.

- (9) *Se non studio sul libro di matematica, non capirò la materia.* Se fosse vera tale massima, cosa potresti dire riguardo ai seguenti casi?
- i. Non hai capito la Matematica;
 - ii. Vai bene in Matematica;
 - iii. Non utilizzi il libro di Matematica.
- (10) Calcolare la tabella di verità per la proposizione:

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg q)$$

- (11) Si può dire dall'implicazione "Se corro mi farà male la milza" che:
- Dal momento che non corro, non mi farà male la milza
 - Se mi farà male la milza è perché mi sono messo a correre
 - Se la milza non mi farà male, allora non mi ero messo a correre?
- (12) Si può dire dall'implicazione "Se sono nervoso, dormo male" che:
- Dal momento che non dormo male, allora non sono nervoso
 - Se non sono nervoso, allora dormirò bene
 - Se dormo male è perché sono nervoso?
- (13) Scrivere la tabella di verità per:

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neq (\neg p \vee \neg q).$$

Successivamente scrivere la proposizione equivalente, applicando le leggi di De Morgan.

- (14) Si può dire dall'implicazione "Se si sta molto sui social media, si riducono le proprie capacità intellettive" che:
- Dal momento che si passa molto tempo sui social, rincretinisco
 - Se rincretinisco è perché sono stato molto sui social media
 - Se non rincretinisco, allora non passo molto tempo sui social?
- (15) Si può dire dall'implicazione "Chi ha il diabete, beve spesso" che:
- Dal momento che bevo spesso, allora ho il diabete
 - Se non ho il diabete, allora berrò poco
 - Se non bevo molto, allora non ho il diabete?
- (16) Si può dedurre da "Se muori, non ti potrò più vedere" che se non sei morto allora ti potrò rivedere? Cos'altro si può dedurre?
- (17) Data l'implicazione "Se non stai bene, stai a letto", determinare le forme valide di ragionamento.
- (18) Spesso si sente dire: "Se piove, allora non può nevicare". Scrivi le uniche due forme di ragionamento valide per questa implicazione.
- (19) Scrivere le forme di ragionamento valide dedotte dall'implicazione: "Se si alza la temperatura, i ghiacciai si scioglieranno".
- (20) Scrivi la tabella di verità per la seguente affermazione:

$$((p \rightarrow q) \rightarrow s) \vee (\neg s \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)).$$

2. Relativi al Capitolo 2

2.1. Approssimazione soluzione equazione.

- (21) Determinare, con il metodo di bisezione, la soluzione di:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

presente nell'intervallo $(-1, 0)$.

- (22) Stesso esercizio di prima per l'equazione:

$$x^6 + x - 3 = 0$$

con soluzione nell'intervallo $(1, 2)$.

- (23) Trova la soluzione di:

$$e^{-x} - x - 10 = 0$$

compresa nell'intervallo $(-3, -2)$.

- (24) Trova ora quella di:

$$x \cdot \ln(x) - 1 = 0$$

nell'intervallo $(1, 2)$.

- (25) Con il metodo delle secanti determina la soluzione di:

$$2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$$

nell'intervallo $(2, 3)$.

- (26) Applica il metodo delle secanti per determinare una soluzione di:

$$\ln(x) + x - 2 = 0$$

nell'intervallo $(1, 2)$.

- (27) Come per l'esercizio di prima, trova la soluzione di:

$$x \cdot e^x - x - 1 = 0$$

in $(-2, -1)$.

- (28) Applica il metodo delle tangenti di Newton per risolvere l'equazione:

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

nell'intervallo $(-2, -1)$. Confronta la soluzione trovata con quella che otterresti risolvendo formalmente l'equazione biquadratica.

- (29) Utilizza il metodo delle tangenti per approssimare la soluzione di:

$$e^{x-1} + x - 3 = 0$$

nell'intervallo $(1, 2)$.

- (30) Le curve $y = \sqrt{x}$ e $y = e^x - 2$ si incontrano in un punto compreso nell'intervallo $(1, 2)$. Darne una approssimazione numerica utilizzando il metodo delle tangenti di Newton.

- (31) Utilizza il metodo di punto fisso per determinare la soluzione approssimata di:

$$x = \cos^2(x) - \sin(x)$$

nell'intervallo $(0, 1)$.

- (32) Utilizza il metodo di punto fisso per risolvere l'equazione:

$$3x^4 + 6x^3 = 1$$

nell'intervallo $(-3, -1)$.

- (33) L'equazione:

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 8 = 0$$

ammette tre soluzioni reali: determinale tutt'e tre, dopo aver disegnato approssimativamente la funzione associata al polinomio presente nel primo membro, utilizzando per ciascuna soluzione un metodo diverso scelto tra bisezione, secanti e tangenti.

- (34) Trova le due soluzioni di:

$$\sqrt{9 - x^2} = \frac{1}{x},$$

con almeno tre metodi diversi.

- (35) Trova la soluzione dell'equazione:

$$\ln(x) + x^3 = 0,$$

con almeno tre metodi diversi.

2.2. Approssimazione aree.

- (36) Applicare il metodo di esaustione per approssimare l'integrale, suddividendo l'intervallo d'integrazione in 4 sottointervalli di uguale ampiezza:

$$\int_{-2}^0 \left(x^2 + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx.$$

- (37) Si approssimi l'integrale definito seguente con il metodo dei trapezi, utilizzando una partizione di soli tre sottointervalli di eguale ampiezza:

$$\int_1^7 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

- (38) Calcola con in metodo dei rettangoli, con quello dei trapezi e con quello delle parabole, l'area sottesa dalla curva $y = 2x^2 + 2x$ nell'intervallo $I = [2, 4]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di egual ampiezza. Confronta la soluzione approssimata con quella che si calcola direttamente utilizzando le primitive.

- (39) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = x^2 + 1$ nell'intervallo $I = [-2, 0]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (40) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = 3x^2$ nell'intervallo $I = [1, 3]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (41) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = 2x^2 - 3x$ nell'intervallo $I = [0, 2]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (42) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = 4x^2 - x$ nell'intervallo $I = [1, 2]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (43) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = x^2 - x$ nell'intervallo $I = [3, 4]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (44) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = 5x^2 - 1$ nell'intervallo $I = [1, 2]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (45) Calcola con in metodo di esaustione e con quello dei trapezi l'area sottesa dalla curva $y = \frac{1}{2}x^2$ nell'intervallo $I = [2, 4]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (46) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$ nell'intervallo $I = [2, 4]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (47) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = 2x^2 - \frac{2}{3}x$ nell'intervallo $I = [1, 3]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (48) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = \frac{2}{3}x^2 + 1$ nell'intervallo $I = [1, 5]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (49) Stesso esercizio di prima, per l'area sottesa da: $y = \frac{1}{5}x^2 + x$ nell'intervallo $I = [3, 5]$ suddividendo I in dieci sottointervalli di equal ampiezza.
- (50) Utilizzando il metodo delle parabole, determina l'area sottesa dalla campana di Gauss nell'intervallo di integrazione indicato (in pratica ti sto dicendo di calcolare $Pr(0 \leq X \leq 0.68)$) :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{0.68} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

3. Relativi al Capitolo 3

(51) Determina prodotto scalare e prodotto vettoriale tra $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sono perpendicolari? perché?

(52) Determina l'ampiezza dell'angolo che si forma tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(53) Quanto vale l'area del parallelogramma due lati dei quali sono i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$?

(54) Determina l'equazione del piano perpendicolare al vettore $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $P(4, -1, 2)$.

(55) Determina l'equazione del piano passante per i punti $A(6, 2, -3)$, $B(1, -2, 0)$ e $C(4, 2, -1)$. Poi trova l'equazione della retta ortogonale ad esso e passante da B .

(56) Trova il piano ortogonale al piano di equazione $3x - y - z + 2 = 0$ e passante per i punti $A(1, -4, 3)$ e $B(2, -1, 2)$.

(57) Trova la distanza del piano $x - 5y + 7z - 1 = 0$ dalla retta di equazioni $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, spiegando come hai fatto!

(58) Se un piano ha equazione vettoriale:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quanto disterà il punto $P(4, 3, 3)$ da esso? e dalla retta passante per i due punti di coordinate pari alle componenti che generano il piano stesso?

(59) Trova l'equazione della sfera di centro $C(2, 1, -5)$ e tangente al piano di equazione $5x - y + 5 = 0$.

(60) Trova il piano tangente nel punto $P(2, -1, 3)$ alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 6y - 5z - 9 = 0$.

(61) Assegnati nello spazio i punti $A(1, 0, -1)$ e $B(-3, -2, 0)$, sia r la retta passante per A e B . Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P(-1, 3, 4)$ e perpendicolare alla retta r .

(62) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = x^2 + xy - y^2,$$

nel punto $P(1, 1, 1)$.

(63) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = xy - x^2y^2,$$

nel punto $P(1, 2, -2)$.

(64) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = xy^2 - x^2y$$

nel punto $P(1, 1, 0)$.

(65) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = xy^2 - xy + x^2y,$$

nel punto $P(1, 1, 1)$.

(66) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = xy^2 - y$$

nel punto $P(2, 1, 1)$.

(67) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = xy - 2y^2,$$

nel punto $P(2, 1, 0)$.

(68) Determinare il piano tangente alla superficie definita dalla funzione

$$z = f(x, y); \quad f(x, y) = 4xy - 2y^2 + y$$

nel punto $P(0, 1, 1)$.

(69) Data la funzione definita implicitamente da:

$$z - x^3y + 2xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

determinare la derivata direzionale lungo la direzione del vettore

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ nel suo punto corrispondente a } P(1, 1).$$

(70) Data la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da:

$$4x^2 + 3y + 2y^2 + z = 1,$$

determina l'equazione del piano tangente nel suo punto di coordinate $P(1, -1, -2)$.

- (71) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^3 - 3xz + y^2 = 1$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, 2)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (72) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$2x - xyz + y = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(2, 1)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (73) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^3 - yz + y^3 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, 1)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (74) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^3 - 4z + y + 5 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, -2)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (75) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x - 4z^3 + y^2 = 1$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, 2)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (76) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$3x^2y + z + 2y^3 - 2 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(2, 2)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e

YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (77) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$xy^3 + z - y - 4 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(3, 1)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (78) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x^2y - z^3 - x - 1 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(2, 3)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (79) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$x + y^3 - xz^3 - 4 = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, 1)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

- (80) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$\frac{1}{x}y - 3z + 2x = 0$$

nel punto la cui proiezione sul piano XY è $(1, 0)$. Se tale piano (tangente) non risulta parallelo ai tre piani coordinati XY , XZ e YZ , determinare, in forma vettoriale, le equazioni delle rette che si generano dall'intersezione di essi.

4. Relativi al Capitolo 4

- (81) Determinare i punti di min o max per la funzione definita da

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3y$$

ed il piano tangente alla curva in esso.

- (82) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

ed ivi i piani tangenti.

- (83) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 2$$

ed ivi i piani tangenti.

- (84) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$x^2 + y^2 + z^3 = 1$$

ed ivi i piani tangenti.

- (85) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$4x^2 - x + 2y^2 + z^2 = 3$$

ed ivi i piani tangenti.

- (86) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$x^2 + 2y + 3y^2 - z = 1$$

ed ivi i piani tangenti.

- (87) Determinare i punti di min o max per la funzione $z = F(x, y)$ implicitamente definita da

$$4x^2 + 3y + 2y^2 + z = 1$$

ed ivi i piani tangenti.

- (88) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = xy$ sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

- (89) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = 2xy + 3x$ sotto il vincolo $x + 2y = 83$.

- (90) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x^2 - 3y^4$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

- (91) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x^2 + 8y^2$ sotto il vincolo $x + y = 3$.

- (92) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = 3x^4 + 2y$ sotto il vincolo $x^2 + y = 1$.

- (93) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x^2 + xy$ sotto il vincolo $xy = 1$.

- (94) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x(y + 3)$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.
- (95) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x - y$ sotto il vincolo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- (96) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x + y$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 - 2 = 0$.
- (97) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = 3x^4 + 2y$ sotto il vincolo $x^2 + y = 1$.
- (98) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x(y + 3)$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.
- (99) Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $F(x, y) = x - y$ sotto il vincolo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- (100) Determinare i valori critici della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sul cerchio $x^2 + y^2 = 1$.
- (101) Hai a disposizione un lamierino di area fissata $A = 12$ metri-quadrati. Vuoi costruire una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo senza il coperchio superiore. Quali devono essere le dimensioni della base (x, y) e dell'altezza z per massimizzare il volume?
- (102) Trova il punto sulla superficie del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ che si trova alla distanza minima dal punto $P(0, 0, 10)$.
- (103) Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determinare le dimensioni del rettangolo di area massima inscritto in essa, con i lati paralleli agli assi coordinati.
- (104) Una piastra metallica ha forma di cerchio e si può rappresentare nel piano cartesiano tramite l'equazione: $x^2 + y^2 \geq 4$. La temperatura in ogni punto è data da $T(x, y) = x^2 + 2 \cdot y^2 - x$. Trova i punti più caldi e più freddi della piastra.
- (105) Un raggio di luce deve andare da un punto A in un mezzo a un punto B in un altro mezzo con velocità diverse: v_1 e v_2 . Trova il percorso che minimizza il tempo di percorrenza totale.
- (106) Un serbatoio deve avere la forma di un cilindro sormontato da una semisfera. Se il volume totale V è fissato, quali devono essere il raggio r e l'altezza h della parte cilindrica per minimizzare la superficie totale (e quindi il costo del materiale)?

- (107) Un'azienda ha una funzione di produzione $P(L, K) = b \cdot L^\alpha K^\beta$ dove L è il lavoro e K è il capitale. Se il costo del lavoro è ω , il costo del capitale è r e il budget totale è B , e quindi $B = \omega L + r K$, trova la combinazione (L, K) che massimizza la produzione.
- (108) Dati tre punti sperimentali (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , trova i parametri m e q della retta $y = m x + q$ che minimizzano la somma dei quadrati degli scarti:

$$S(m, q) = \sum [y_i - (m x_i + q)]^2$$

- (109) Tre città si trovano in un piano (in scala) poste nei punti di coordinate $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(2, 4)$. Un'azienda vuole costruire un magazzino in un punto $W(x, y)$ tale che la somma delle distanze al quadrato dalle tre città sia minima. Dove piazzare il magazzino?
- (110) Una particella si muove in un campo di forze il cui potenziale è descritto dalla funzione $V(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Trova i punti di equilibrio (stazionari) e determina se sono stabili (minimi), instabili (massimi) o punti di sella.

5. Relativi al Capitolo 5

- (111) Utilizza il metodo di Eulero per risolvere il seguente *Problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con $x \in [0, 1]$ e passo incrementale $h = 0.25$.

- (112) Stesso esercizio di prima per:

$$\begin{cases} y' = e^{\frac{2}{y}} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Con $x \in [0, 2]$ e passo incrementale $h = 0.5$.

- (113) Determina un valore approssimato di $y(1.4)$ sapendo che $y = y(t)$ è soluzione della o.d.e. $y' = t^3$, $y(0) = 1$. Usa il metodo di Eulero con un incremento $h = 0.1$.

- (114) Uno studio della popolazione del Botswana condotto dal 1975 al 1990, portò a formula il seguente modello di crescita della popolazione:

$$\frac{d}{dt}P = kP - \alpha t,$$

dove t denota il tempo che trascorre in anni a partire dal 1990 (considerato "tempo zero" t_0) con la popolazione $P(0) = 1.285$ milioni di persone, $k = 0.0355$ e $\alpha = 1.60625 \cdot 10^{-3}$. Usa il

metodo di Eulero, con passo incrementale $h = 0.01$ per approssimare $P(1)$ ovvero la popolazione nel 1991. Prova anche ad usare $P(1)$ per determinare $P(0)$, ponendo il passo incrementale negativo $h = -0.01$.

- (115) In farmacocinesi l'equazione di Michaelis-Menten :

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{-Kx}{A+x},$$

descrive la velocità con cui un corpo assorbe un farmaco (o una droga). In questa equazione $x(t)$ rappresenta la concentrazione del farmaco nel corpo al tempo t e K, A sono due costanti positive. Si è trovato, per un particolare farmaco, che $A = 6$ e $K = 1$, con per una concentrazione iniziale $x(0) = 0.0025$. Usa il metodo di Eulero con passo incrementale $h = 0.1$ per valutare le concentrazioni al tempo 1, 2 o 10. Stima quanto tempo occorre affinché la concentrazione del farmaco risulti la metà di quella iniziale.

- (116) Nel 1927 i due scienziati Kermack e McKendrick gettarono le basi di una nuova branca: l'epidemiologia; essi presentarono i dati sul numero di decessi $R = R(t)$ provocati da una pestilenza diffusa in una popolazione di ratti di Bomby, durante il periodo "dicembre 1905"- "luglio 1906". I loro dati si adattavano a questo modello differenziale:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{890}{\cosh(0.2t - 3.4)}.$$

Supponendo $R(0) = 0$, usa il metodo di eulero e poi quello di Heun (con passo incrementale a tua scelta) per completare questa tabella:

t in settimane	morti effettive	morti predette
1	4	
5	68	
10	425	
20	6339	
30	9010	

- (117) Nel 2020, per prevedere l'andamento del *COVID-19*, si è usato spesso il modello *SIR*. Consideriamo la variazione degli infetti $I(t)$ in una popolazione dove il tasso di trasmissione è β e il tasso di guarigione è γ . Il modello differenziale è questo:

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot \frac{S \cdot I}{N} - \gamma I.$$

Si osservi che S indica il numero dei soggetti *suscettibili*, ovvero che non sono ancora infettati, ma che potrebbero contrarre la malattia. Determina l'andamento degli infetti in una città italiana di centomila abitanti nell'arco di un mese (30 giorni), considerando il *livello di contagiosità* $\beta = 0.3$, il *tempo di guarigione*, mediamente, di 10 giorni (per cui $\gamma = 0.1$) ed N evidentemente 1000000. Inoltre la condizione iniziale sia che al tempo $t = 0$ ci siano 100 infetti.

[Oss.: Il numero dei suscettibili varia ad ogni passo, poiché il suo tasso di crescita (meglio decrescita) corrisponde all'opposto del primo addendo del modello SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S \cdot I}{N},$$

per cui devi risolvere contemporaneamente due o.d.e.: una è quella che indica la variazione di S e l'altra quella che indica la variazione di I . Tra l'altro, il secondo addendo del modello SIR corrisponde al tasso di variazione dei "rimossi", ovvero di quelli che non possono più infettarsi, o perché guariti, o perché morti.

Se $I_0 = 100$ allora $S_0 = N - I_0$.]

- (118) Mi verso un caffè bollente in una tazzina e devo aspettare che si raffreddi un po' prima di berlo. La velocità con cui la temperatura del caffè cambia -seguendo la legge di Newton- è proporzionale alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente (T_{amb}). Possiamo pertanto scrivere:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{amb}).$$

Supponi che $k = 0.05 \text{ min}^{-1}$ e che la temperatura ambientale sia di venti gradi ($T_{amb} = 20^\circ C$); supponi altresì che $T(0) = 85^\circ C$. Determina la temperatura dopo 10 minuti, usando il metodo di Eulero e poi quello di Heun, con un passo incrementale (del tempo) $h = 1$.

- (119) Le popolazioni batteriche non crescono all'infinito perché le risorse sono limitate: l'equazione logistica, conosciuta nell'ambito della dinamica delle popolazioni, è utile, ad esempio, per studiare la crescita di una coltura batterica in laboratorio, che non può andare oltre un certo limite di individui (K è il limite massimo per la popolazione). Sia, pertanto, data l'equazione logistica.

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

con tasso di crescita $\lambda = 0.2$ e capacità massima $K = 5000$. Considera una popolazione iniziale $P(0) = 100$ (di 100 unità) e calcola l'evoluzione della popolazione a cui è associata questa o.d.e., sia tramite il metodo di Eulero, sia tramite metodo di Heun, con passo incrementale a tuo piacimento.

- (120) Si sa che quando un "grave" precipita molto velocemente, esso viene rallentato, nella sua caduta, da una forza resistente direttamente proporzionale al quadrato della velocità di caduta. Pertanto, se un paracadutista si lancia da un aereo, oltre alla forza di attrazione gravitazionale, su di lui agisce anche, in direzione opposta, tale forza che "lo rallenta". Possiamo scrivere, seguendo gli insegnamenti di Newton, la seguente equazione:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v^2,$$

in cui $g \approx 9.81$ metri/secondo-quadro, m è la massa del paracadutista, che supponiamo di 80 kg ed il coefficiente di attrito $c = 0.25$ Kg/m. Supponendo una velocità iniziale $v(0) = 0$ m/s, determina la velocità del paracadutista dopo 5 secondi, utilizzando il metodo di Eulero e poi quello di Heun, con passo incrementale a tua scelta.

6. Relativi al Capitolo 6

- (121) Scrivi la trasformata di Laplace della funzione:

$$f(x) = -x e^x + x^2.$$

- (122) Stesso esercizio di prima, per la funzione:

$$f(x) = -4x + 2 \cos(x) + 3 \sin(x).$$

- (123) Idem per la funzione:

$$f(x) = 1 + x + 2 e^{3x} + \cos^2(\pi x).$$

- (124) Idem per la funzione:

$$f(x) = e^{3x} \cdot \cos(x).$$

- (125) Trova la trasformata di Laplace della funzione:

$$f(x) = x^2 \cos(x) \sin(x).$$

- (126) Determina l'anti-trasformata di Laplace della funzione:

$$F(s) = \frac{s - 4}{16 + (s - 4)^2}.$$

(127) Idem per la funzione:

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s}.$$

(128) Idem per la funzione:

$$F(s) = \frac{7}{s^2 - 4s + 11}.$$

(129) Idem per la funzione:

$$F(s) = \frac{3 - 2s}{s(s^3 + 3s^2 - 4s - 12)}$$

(130) Applicando la trasformata di Laplace, risolvi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} -\ddot{y} + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$$

(131) Idem esercizio precedente:

$$\begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} = -e^{4x} \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

(132) Idem per:

$$\begin{cases} \ddot{y} - y = e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

(133) Idem per:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

(134) Idem per:

$$\begin{cases} \dot{y} - 5y = 2e^{-3x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(135) Un peso di massa $m = 4$ Kg è appeso all'estremo di una molla che è ancorata al soffitto. La costante elastica è $k = 44$ Kg/m e la massa inizia ad oscillare, attorno alla posizione di equilibrio, seguendo l'equazione del moto armonico

$$\ddot{s} + \frac{k}{m} s = 0.$$

Determina s sapendo che la molla, inizialmente, subisce una elongazione di 3 cm.

- (136) Un circuito è composto da un generatore di tensione costante V_0 , una resistenza R e un condensatore di capacità C , inizialmente scarico. Al tempo $t = 0$, l'interruttore viene chiuso. Determina l'andamento della carica $q(t)$ sul condensatore.

[Oss.: Si ricorda che l'o.d.e. che modella un circuito RC come questo è:

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = V_0,$$

che si ottiene dalla **legge di Kirchhoff**: la somma delle cadute di potenziale deve essere uguale alla tensione del generatore.]

- (137) Una massa m di un Kg è collegata ad una molla di costante elastica $k = 5$ N/m ed ad uno smorzatore con coefficiente $b = 4$ Ns/m. La massa viene spostata dalla posizione di equilibrio fino a $s(0) = 1$ metro e poi rilasciata da ferma. Trova la legge oraria.

[Oss.: Considerando tutte le forze agenti (elastica $F_e = -k s$ e viscosa dello smorzatore $F_v = -b \dot{s}$) possiamo scrivere la seguente equazione differenziale:

$$m \ddot{s}(t) + b \dot{s}(t) + k s(t) = 0,$$

imponendo le condizioni iniziali $s(0) = 1$ e $\dot{s}(0) = 0$.]

- (138) Un sensore di temperatura si trova inizialmente a $T_0 = 100^\circ C$. All'istante $t = 0$ viene immerso in un fluido refrigerante che mantiene una temperatura costante di $T_f = 20^\circ C$. Secondo la legge di Newton, la velocità con cui si raffredda è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra corpo ed ambiente in cui si trova. La costante di proporzionalità, a sua volta, dipende dalla "resistenza termica" e dalla "capacità termica" del sensore e possiamo scrivere: $\lambda = -\frac{1}{RC}$. Per cui otteniamo l'o.d.e.:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lambda \cdot [T(t) - T_f].$$

Imponendo la condizione iniziale $T(0) = 100$, determina la legge con cui varia la temperatura nel tempo.

- (139) Un serbatoio cilindrico di sezione S ha in ingresso un tubo con una portata costante q_{in} ed un tubo in uscita che oppone una resistenza R , tale che la portata varia nel tempo come $q_{out} = \frac{h(t)}{R}$, essendo $h(t)$ il livello del liquido al tempo t . Inizialmente il serbatoio sia vuoto. Dato che la variazione del volume di liquido è data dalla

differenza tra portata in entrata e in uscita, si può scrivere:

$$S \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_{in} - q_{out}.$$

Determinare quando si raggiunge il “livello stazionario”, ovvero quando succede che la quantità di liquido in entrata è esattamente uguale alla quantità di liquido in uscita.

- (140) Una azienda ha un livello di inventario $I(t)$. La domanda dei clienti è data da $D(t)$. L'azienda decide di ordinare nuovi prodotti con una velocità di rifornimento $R(t)$, proporzionale alla differenza tra l'inventario desiderato I_{target} e quello attuale $I(t)$. Quindi:

$$\frac{dI(t)}{dt} = R(t) - D(t), \quad R(t) = \lambda \cdot [I_{target} - I(t)],$$

essendo λ la velocità con cui l'azienda reagisce all'errore di inventario. Supponi che inizialmente il livello di inventario sia proprio quello desiderato ($I(0) = I_{target}$) e che la domanda aumenti improvvisamente da 0 a D_0 . Determina come dovrà variare l'inventario nel tempo.

7. Relativi al Capitolo 7

- (141) Scrivi la serie di Fourier della funzione, nell'intervallo indicato ed estesa per periodicità su tutto l'asse reale:

$$f(x) = 1 - x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- (142) Idem per:

$$f(x) = \sin^2(x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- (143) Stesso esercizio con:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ 1 & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- (144) Trova la serie di Fourier per la funzione definita in $[-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2.$$

- (145) Stesso esercizio di prima ma per la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2 & x \in [-\pi, 0) \\ (x - \pi)^2 & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- (146) Idem per:

$$f(x) = \cos^3(x).$$

(147) Stesso esercizio per:

$$f(x) = x \cos(x).$$

(148) Idem per:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & x \in [-\pi, 0) \\ x - \pi & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

(149) Dallo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ per $x \in [-\pi, \pi)$, deduci la validità dell'uguaglianza:

$$\frac{3}{4} \cdot \pi^2 = -1 + \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{18}{35} + \frac{4\sqrt{3}}{21} - \frac{5}{33} + \dots$$

(150) Dallo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ per $x \in [-\pi, \pi)$, deduci la validità dell'uguaglianza:

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255} + \dots$$

Indice analitico

- Algoritmo
 - Bisezione, 24
 - Punto Fisso, 32
 - Secanti, 27
 - Tangenti di Newton, 29
- Aristotele, 3
- Campana di Gauss, 34
- Connettivi Logici, 5
 - Doppia implicazione, 17
 - e, 6
 - Implicazione materiale, 8
 - o, 6
 - xor, 10
- Contraddizione, 10
- Coordinate sferiche, 56
- Coseni direttori, 48
- Curva, 53
- Delta di Dirac, 102
- Derivata
 - Direzionale, 58
 - Parziale, 58
- Determinante, 50
 - Hessiano, 71
- Differenziale
 - Funzion a più variabili, 66
 - Funzioni a più variabili, 65
- Distribuzione $N(0,1)$, 34
- Equazione di Michaelis-Menten, 131
- Equivalenza Logica, 10
- Forma quadratica, 69
- Forme di ragionamento valide, 12
- Fourier
 - coefficienti, 111
- Funzione
 - degli errori, 35
 - di Lagrange, 76
 - Ottimizzazione, 65
 - periodicità, 105
- Funzione Generatrice dei Momenti, 91
- Funzione Lipschitziana, 81
- Gibbs
 - fenomeno, 114
- Implicazione, 16
- Lagrange
 - moltiplicatore, 76
- Lagrangiana, 76
- Legge di Kirchhoff, 135
- Leggi di De Morgan, 11
- Logica, 3
- Lotka-Volterra, 87
- Matrice
 - Hessiana, 70
- Metodo
 - Bisezione, 22
 - Cavalieri-Simpson, 39
 - Integrazione
 - Parabole, 39
 - Rettangoli, 35

- Trapezi, 37
- Newton, 28
- Punto Fisso, 31
- Secanti, 25
- Tangenti, 28
- Modello Preda-Predatore, 87
- Modus
 - Ponens, 13
 - Tollens, 14
- Negazione
 - di una Proposizione, 5
- O.D.E.
 - Metodo di Eulero, 82
 - Metodo di Heun, 85
- Piano, 49
 - Tangente, 61
- polinomio trigonometrico, 106
- Principio
 - del terzo escluso, 12
- Problema di Cauchy, 81
- Prodotto
 - vettoriale, 51
- Prodotto scalare, 107
- prodotto scalare, 107
- Proposizione, 5
- Punto
 - Regolare, 67
- Quantificatori, 11
- Regola di Sarrus, 50
- Retta di regressione, 72
- Retta nello spazio, 46
- Schwarz
 - Teorema, 69
- Sillogismo, 13
- Superficie, 53
- Tabella
 - di verità, 5
- Tautologia, 10
- Teorema
 - Criterio, 16
 - di Schwarz, 69
 - Dimostrazione, 16
 - Ipotesi, 16
 - Tesi, 16
- Teorema di Picard, 81
- Test
 - massimalità, 71
 - minimalità, 71
- Trasformata di Laplace, 92
- Vettore
 - Gradiente, 59
 - Normale, 63

Bibliografia

- [1] Apostol Tom M. - Calcolo Vol.1,2, 3 - Bollati Boringhieri - 1977
- [2] Berzolari L., Vivanti G., Gigli D.: Enciclopedia delle Matematiche elementari e Complementi - Ulrico Hoepli Editore, 1943
- [3] Caunt G.W. - An Introduction to the Calculus - Oxford at the Clarendon Press - 1914
- [4] Conti Franco - Calcolo. Teoria e applicazioni - McGraw-Hill Companies - 1993
- [5] Demidovic Boris P. - Esercizi e Problemi di Analisi Matematica - Editori Riuniti - 2001
- [6] Efimov N. - Elementi di Geometria Analitica - Editori Riuniti - 1986
- [7] Gemignani Michael C. - Calculus and Statistics - Dover - 1970.
- [8] Kline Morris - Calculus - Dover - 2017
- [9] Kreyszig Erwin - Advanced Engineering Mathematics - Wiley - 1993
- [10] Minorsky V.P. - Problems in Higher Mathematics (Translated from the Russian by Yuri Ermolyev) - Mir Publishers Moscow - 1975
- [11] Murray Daniel A. - Introductory course in Differential Equations - Longmans, Green and Co. - 1910
- [12] Pagani CD., Salsa S. - Analisi Matematica Vol.1,2 - Masson- 1993.
- [13] Piskunov Nikolaj - Calcolo differenziale e integrale Vol.1,2- Editori Riuniti -1999.
- [14] Quarteroni Alfio, Sacco R., Saleri F., Gervasio P. - Matematica Numerica -Springer - 2014
- [15] Ross Sheldon - A first course in PROBABILITY - Pearson Education International - 2010
- [16] Wonnacott T.H., Wonnacott R.J. - Introduzione alla Statistica - FrancoAngeli - 1998

ISBN 979-12-243-2593-2



(Prezzo: € 00,00)